Solvo de algebraj ekvacioj

(Norbert) Südland[*], (Armin) Kadow[†]
Otto-Schott-Straße 16, D-73431 Aalen /Virtembergo, Germanujo

Ĝisdatigo: 21-an de Novembro, je la 2015-a jaro post Kristo

Resumo

La procedoj al la solvo de algebraj ekvacioj de la n-a grado prezentiĝos laŭ tio, kio estas konata.

1 Enkonduko

1.1 Taskostarigo

Algebra ekvacio nur enhavas identaj entjeraj obloj de nekonata funkcio x. La identaj obloj de samaj termoj estas kunigitaj al *potencaj termoj*. Ĉe algebraj ekvacioj kun nur 1 nekonata funkcio x la *grado* de la ekvacio unusence estas determinebla kiel la plej granda potenco de la apartena *polinomo*. *Polinomo* $P(x)$ en nekonata funkcio x estas sumo el potencoj spece:

$$P(x) := \sum_{\mu=0}^{n} \hat{a}_\mu \, x^\mu = 0. \tag{1}$$

La *koeficientoj* $\hat{a}_\mu$ estas $(n+1)$ laŭvolaj, sed fiksaj, antaŭfaktoroj kaj rajtas esti eĉ 0. La *grado* n de polinomo dependas de la plej granda fakte ekzistanta potenco n de la sumo $P(x)$.
Kiel *solvo de algebra ekvacio* oni komprenas la arto skribi polinomon de la speco (1) kiel produto de la speco:

$$P(x) := b_0 \prod_{\nu=1}^{n} (x - b_\nu) = 0. \tag{2}$$

La ŝanĝo de produto de la speco (2) en sumon de la speco (1) okazas per simpla elmultiplikado kaj tial ankaŭ nomiĝas kiel *kontrolokalkulado*.

[*]germana: sinjoro [(Norbert) Zidland], retadreso: Norbert.SUEDLAND@T-Online.de
[†]germana: sinjoro [(Armin) Kado], helpo dume la tradukado

1.2 Normalaj formoj

Kiam en polinomo de la produta prezentado la termo b_0 estas 1, tiam la *normala formo* de la polinomo estas konata. Per elmultiplikado rezultas la kompreno, ke tial ankaŭ $\hat{a}_n = 1$ estas ĝusta. La algebra transformo de ĝenerala suma polinomo (1) en la *normalan formon* $N(x)$ iĝas per divido de la ekvacio (1) per la termo $\hat{a}_n$. La produto en la ekvacio (2) per la divido per b_0 enhave ne ŝanĝiĝas, tial la n-aj eventuale diversaj *radikoj* b_ν de algebra ekvacio rezultas ankaŭ ĉiam en la *normala formo* $N(x)$ de la elmultiplikita polinomo:

$$N(x) \,:=\, x^n \,+\, \sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{\hat{a}_\mu}{\hat{a}_n}\, x^\mu \,=\, x^n \,+\, \sum_{\mu=0}^{n-1} a_\mu\, x^\mu \,=\, \prod_{\nu=1}^{n} (x - b_\nu)\,. \tag{3}$$

La *grado* de la algebra *normala formo* ĉiam estas unusence n.

1.3 Reduktitaj ekvacioj

Per la substituo $x \to y - \frac{\hat{a}_{(n-1)}}{n\,\hat{a}_n} \,=\, y - \frac{a_{(n-1)}}{n}$ la nombro de la koeficientoj de la *normala formo* $N(x)$ reduktas je 1:

$$R(y) := \left(y - \frac{a_{(n-1)}}{n}\right)^n + \sum_{\mu=0}^{n-1} a_\mu \left(y - \frac{a_{(n-1)}}{n}\right)^\mu \,=\, y^n + \sum_{\mu=0}^{n-2} c_\mu\, y^\mu\,, \tag{4}$$

tial per uzo de la *binoma teoremo* ([5], sekcio 2.2.2.1., paĝo 106):

$$(a+b)^n \,=\, \sum_{\mu=0}^{n} \binom{n}{\mu} a^\mu\, b^{n-\mu} \tag{5}$$

kun $\binom{n}{1} = n$ okazas nuligo de la nova koeficiento $c_{(n-1)}$.

1.4 La radikoj de 1

La *radikoj* de 1 en la kompleksa nombra ebeno rezultigas n-dividon de la plena angulo kaj per *kompleksaj nombroj* kun la *nombra sumo* 1 kaj respektiva *fazo* kiel sekvonta menciiĝas:

$$x^n - 1 \,=\, \prod_{\nu=1}^{n} \left(x - \mathrm{e}^{\left(\frac{2\,\pi\,\mathrm{i}\,\nu}{n}\right)}\right). \tag{6}$$

Ĉe tio la identeco $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} \,=\,$ Kosinuso$[x]+\mathrm{i}\,$Sinuso$[x]$ ([5], sekcio 3.4.4.2.1., formulo (3.82), paĝo 514) estas uzenda por determini la realan kaj la imagitan parton de la radikoj de 1. Por multaj malparaj $n \geq 7$ kaj ankaŭ por multaj paraj $n \geq 14$ ĉi tio ĝis nun ofte ne sukcesis analitike nur per radikoj.

1.5 La fundamenta teoremo de la algebro

Nun por prezenti la *reduktitan normalan formon* (4) kiel produto la sekvontaj komprenemoj bezoniĝas:

- Algebra ekvacio de la grado n posedas precise n eventuale diversajn radikojn pro la produta prezentado (2).
- Prezentado de la speco
$$x^n \;=\; \sum_{\mu=0}^{n-1} d_\mu\, x^\mu \tag{7}$$
ĉiam estas ebla, tio signifas, ke la sumo ĉe la dekstra flanko de la ekvacio (7) devas esti unusignifa en la n solvoj de x, por tio la n diversaj *radikoj* de 1 de $(1^n\,|x^n|)$ rezultigas jam ĉiajn n solvojn de la algebra ekvacio.
- Prezentado simile ol la ekvacio (7) kun $(n-2)$ anstataŭ $(n-1)$ ĉe la dekstra flanko pro la ekvacio (4) same ĉiam estas ebla por entjera n, ĉe kio denove n diversaj *radikoj* de 1 el tio sumo tiriĝas.
- La polinomo ĉe la dekstra flanko de la ekvacio (7) estas maksimale de la grado $(n-1)$, eventuale eĉ 0. Do kun kreskanta grado n pli multaj specialaj kazoj de la ĝenerala solvo ekzistas, kioj kun malpli da peno estas eltroveblaj ol la ĝenerala solvo. Ĉi tiaj specialaj kazoj eventuale estas parta kvanto de la ĝenerala solvo.
- La konstruantaj penoj por *ĝenerala solvo* de ĉi tiaj ekvacioj estas tre gravaj, kiam la nombroj $\{n, n-1, n-2\}$ respektive estas de diversaj dividantoj kaj malsamaj ol 1, tio estas la kazo por ĉiaj malparaj $n \geq 5$.
- Por la reduktado de algebra ekvacio de la grado n maksimale $(n-1)$ radikoj de subpolinomo de la maksimala grado $(n-1)$, nomata *resolvento*, estas necesaj. Ĉar la *reduktita normala formo* (4) de polinomo de la grado n posedas $(n-1)$ maldependajn koeficientojn c_μ, rezultas per komparo de la koeficientoj maksimalaj $(n-1)$ determinantaj ekvacioj en maksimale $(n-1)$ nekonataj radikoj. La apartena sistemo de ekvacioj estas reduktenda, precise dirita: krevigenda!
- La nunaj pripensoj validas por ĉiaj kompleksvaloraj koeficientoj a_μ, b_ν aŭ c_μ, ĉe kio precise n solvoj rezultas, kioj nomiĝas *radikoj*.

Antaŭ ol komenco kun komparo de la koeficientoj entute sukcesebliĝos, oni devas serĉi pri ĝenerala produtoprezentado de la *reduktita normala formo* (4) de polinomo de la grado n.

1.6 Reduktita produtoprezentado

La farota polinomo de la grado n konzistas el n faktoroj, kioj posedas la sekvontan konstruaĵon por produkti eble malpli multajn kompleksvalorajn termojn:

- La 1-a faktoro ĉiam estu *sen fazo* kaj konzistas el $(n-1)$ ankoraŭ nekonataj (eventuale kompleksvaloraj) sumigatoj:

$$\left(y - \sum_{\mu=1}^{n-1} z_\mu \, e^{\left(\frac{2\,\pi\,i\,0}{n}\right)}\right) = \left(y - \sum_{\mu=1}^{n-1} z_\mu\right). \tag{8}$$

- La ceteraj faktoroj uzas multopaj de la fazanguloj, kio kaŭze de la n-divido de la plena angulo estiĝas, por atingi, ke ĉio termo z_μ estas anstataŭigebla per ia alia termo $z_{\mu'}$:

$$\prod_{\nu=1}^{n-1} \left(y - \sum_{\mu=1}^{n-1} z_\mu \, e^{\left(\frac{2\,\pi\,i\,\mu\,\nu}{n}\right)}\right). \tag{9}$$

Por tio la baza strukturo de la reduktita solvo povas skribiĝi en la sekvonta formo:

$$\prod_{\nu=0}^{n-1} \left(y - \sum_{\mu=1}^{n-1} z_\mu \, e^{\left(\frac{2\,\pi\,i\,\mu\,\nu}{n}\right)}\right) = 0\,. \tag{10}$$

Elmultiplikita ĉi tia produtoprezentado (10) rezultigas reduktitan polinomon de la grado n en y, ĉe kio la $(n-1)$ radikoj z_μ en ĉi tia produtoprezentado (10) estas ankoraŭ komence nekonataj. Por pruvi, ke la produto (10) rezultigas reduktitan polinomon en y, la koeficiento $c_{(n-1)}$ determiniĝas:

$$\begin{aligned} c_{(n-1)} &= \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{\mu=1}^{n-1} z_\mu \, e^{\left(\frac{2\,\pi\,i\,\mu\,\nu}{n}\right)} = \sum_{\mu=1}^{n-1} z_\mu \sum_{\nu=0}^{n-1} e^{\left(\frac{2\,\pi\,i\,\mu\,\nu}{n}\right)} = \\ &= \sum_{\mu=1}^{n-1} z_\mu \, \frac{e^{(2\,\pi\,i\,\mu)} - 1}{e^{\left(\frac{2\,\pi\,i\,\mu}{n}\right)} - 1} = \sum_{\mu=1}^{n-1} z_\mu \, \frac{1-1}{e^{\left(\frac{2\,\pi\,i\,\mu}{n}\right)} - 1} = 0\,, \end{aligned} \tag{11}$$

ĉe kio la rezulto en ekvacio (11) riceviĝas per ŝanĝo de la sumoj kaj per interpretado de la ĉiukaze enhavata sumo kiel *finita geometria sekvo* ([5], sekcio 2.3.2., paĝo 114) de tio speco:

$$\sum_{\mu=0}^{n-1} q^\mu = \frac{q^n - 1}{q - 1} \tag{12}$$

Por entjeraj μ la identeco validas: $e^{(2\,\pi\,i\,\mu)} = 1$.
Tial la ekvacio (10) estas rigardenda kiel produtoprezentado de la reduktita polinomo (4) kaj kiel konstruktiva ekzistpruvo de principa solvebleco de algebra ekvacio de la grado n.

1.7 La tangentarko

La analitika funkcio tangentarko estas bone konata kiel la inversa funkcio de la trigonometria funkcio tangento. Tial ankaŭ la derivaĵo de la funkcio tangentarko troviĝas en matematikaj libroj (ekzemple [5], sekcio 1.1.3.3., integralo 40., paĝo 37):

$$\frac{\partial \mathrm{Tangentarko}[x]}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\mathrm{i}\,x} + \frac{1}{1+\mathrm{i}\,x}\right). \tag{13}$$

Per la kompleksaj nombroj ekzistas ebleco, ke la rezulto de la ekvacio (13) povas skribiĝi kiel sumo el 2 frakcioj. La inversa funkcio de la derivaĵo estas la integralo, tial nun alternativa prezentado de la tangentarko troviĝas ([5], sekcio 1.1.3.3., integralo 2, paĝo 35) per:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{1}{1-\mathrm{i}\,x} + \frac{1}{1+\mathrm{i}\,x}\right)\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\mathrm{Logaritmo}[1-\mathrm{i}\,x]}{\mathrm{Logaritmo}[\mathrm{e}]} - \frac{\mathrm{Logaritmo}[1+\mathrm{i}\,x]}{\mathrm{Logaritmo}[\mathrm{e}]}\right) &= \\ \frac{\mathrm{i}}{2}\,\frac{\mathrm{Logaritmo}\left[\frac{1-\mathrm{i}\,x}{1+\mathrm{i}\,x}\right]}{\mathrm{Logaritmo}[\mathrm{e}]} = \mathrm{i}\,\frac{\mathrm{Logaritmo}\left[\sqrt{\frac{1-\mathrm{i}\,x}{1+\mathrm{i}\,x}}\right]}{\mathrm{Logaritmo}[\mathrm{e}]} &= \mathrm{Tangentarko}[x]\,. \end{aligned} \tag{14}$$

La derivaĵoj estas samaj, ankaŭ minimume 1 punkto $\mathrm{Tangentarko}[0] = \frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\mathrm{Logaritmo}[1]}{\mathrm{Logaritmo}[\mathrm{e}]} = 0$ estas sama en ambaŭ prezentadoj. Ĉi tia formulo (14) helpas kompreni la rezultojn de la algebro kaj de la trigonometrio. Por la *natura logaritmo* validas $\mathrm{Logaritmo}[\mathrm{e}] = 1$.

1.8 La n-aj radikoj de sumo

La sekvonta rezulto estas helpo por kompreni la ecoj de la n-aj radikoj de sumo:

$$\mathrm{e}^{\left(\pm\,\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{Tangentarko}[\frac{y}{x}]}{n}\right)} = \sqrt[2n]{\frac{x\pm\mathrm{i}\,y}{x\mp\mathrm{i}\,y}} = \frac{\sqrt[n]{x\pm\mathrm{i}\,y}}{\sqrt[2n]{x^2+y^2}}\,. \tag{15}$$

Per tio nun rezultas la $(n+1)$ aŭ n n-aj radikoj de kompleksa sumo:

$$\sqrt[n]{x\pm\mathrm{i}\,y} = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{e}^{\left(\pm\,\frac{2\,\pi\,\mathrm{i}\,\mu}{n} \pm \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{Tangentarko}[\frac{y}{x}]}{n}\right)} \quad \mu \in \{0,1,2,\ldots,[n]\}\,. \tag{16}$$

Se n estas entjero, nur tiam la nombro de la radikoj estas n, ĉar la arko 0 estas la arko $2\,\pi$ en la trigonometrio. La funkcio $[n]$ sen funkcia nomo estas la krampofunkcio de (Carl Friedrich) Gauß[1] rezultiganta la entjeron $[n] \leq n$.
Per la substituo $y \to -\mathrm{i}\,y$ la $(n+1)$ aŭ n n-aj radikoj de sumo troviĝas:

$$\sqrt[n]{x\pm y} = \left(\sqrt{x^2-y^2}\right)^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{e}^{\left(\pm\,\frac{2\,\pi\,\mathrm{i}\,\mu}{n} \pm \frac{\mathrm{HiperbolaTangentarko}[\frac{y}{x}]}{n}\right)} \quad \mu \in \{0,1,2,\ldots,[n]\}\,. \tag{17}$$

La funkcio $\mathrm{HiperbolaTangentarko}[x]$ havas la derivaĵon $\frac{1}{1-x^2}$ kaj analogan prezentadon kiel la tangentarko (14) sen $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$, nome $\frac{1}{2}\,\mathrm{Logaritmo}\left[\frac{1+x}{1-x}\right]$ ([5], sekcio 1.2.2.3., paĝoj 85-86).

[1]germana: sinjoro [(Karl' Fridriĥ) Gaŭs] (1777 ĝis 1855 post Kristo)

2 Konkretaj solvoj

2.1 Motivado

Nun sekvos ne la ĝenerala solvo de algebraj ekvacioj kaj la per tio optimigita algoritmo, ĉar ili ne troviĝis per la verkinto ĝis nun. Pli ĝuste tioj specialaj kazoj de la algebraj ekvacioj, de kioj solvoj estas konataj, prezentadiĝos kun deduktadoj. Pli malfruaj kompletigoj per pliaj verkontoj tial estas eblaj kaj salutindaj.
Algebraj ekvacioj de la grado 0 ne ekzistas, ĉar validas $x^0 = 1$, tial solvo en x ne plu estas unusignifa. Algebraj ekvacioj de la grado 1 ankaŭ nomiĝas *linearaj ekvacioj* kaj traktiĝas en diversaj lernolibroj en la kadro de la *matricokalkulado*. La mallinearaj algebraj ekvacioj estas la algebraj ekvacioj en la strikta senco, tiojn tia ĉi artikolo traktas.

2.2 Kvadrataj ekvacioj

2.2.1 Historio

La kvadrataj ekvacioj estas algebraj ekvacioj de la speco (1) aŭ (2), ĉe tioj validas $n = 2$. La solvo de ili malkovriĝas ekde la antikveco, kiamaniere la *teoremo de Pitagoro*, kio validas por rektangulaj trianguloj, per $a^2 + b^2 = c^2$ priskribas interligitecon de la eĝlongecoj a, b kaj c, tio ludas specialan rolon en la konstruarto. Aparte malnova *kvadrata ekvacio* bezoniĝas por troveco kaj metriko de la *ora sekco*, kio kreis tutajn arkitekturoskolojn.

2.2.2 Reduktita ekvacio

La reduktita kvadrata ekvacio (4,10) jam estas la *lineara resolvento* en y^2 kaj havas nur 1 nekonatan radikon $z = z_1$ (ĉiam validas: $z_\mu^n := (z_\mu)^n$):

$$y^2 + p \,=\, (y - z_1)\,(y + z_1) \,=\, y^2 - z_1^2 \,=\, 0. \tag{18}$$

La solvo $y_{1,2} \to \pm z_1 = \pm\sqrt{-p}$ estas evidenta kaj ne bezonas grandan kalkularton, se la determino de la kvadratoradiko estas konata.

2.2.3 Noktomeza formulo

En la lerneja instrukcio ekzistas lernigenda *noktomeza formulo*[2], kio solvas la kvadratan ekvacion $a\,x^2 + b\,x + c \,=\, 0$ komplete kaj sen kazodiferencigo:

$$x_{1,2} \,=\, \frac{-b \,\pm\, \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}\,. \tag{19}$$

[2] Ĝi estu preta eĉ noktomeze!

2.3 Kubaj ekvacioj

2.3.1 Historio

La kubaj ekvacioj validis ([4], paĝo 112) por (Luca) Pacioli[3] (1445 ĝis 1514 post Kristo) kiel nesolveblaj, kvankam li estis aparte merita kaŭze de la algebro. La solvon trovis sendepende (Scipione) del Ferro[4] (ĉirkaŭ 1465 ĝis 1526 post Kristo) kaj (Niccolo) Tartaglia[5] (ĉirkaŭ 1500 ĝis 1557 post Kristo). Nur 1539 post Kristo la solvo liberiĝis per Tartalja al (Geronimo) Cardano[6] (1501 ĝis 1576 post Kristo) kaŭze de sia premo, tial ĝi unue aperis skribita 1545 post Kristo en sia instrulibro ≪*ars magna*≫[7] kaj tial konserviĝis. La formuloj tial same nomiĝas *la Kardanaj formuloj*.
En la jaro 1604 post Kristo (Johann) Faulhaber[8] (1580 ĝis 1635 post Kristo) eldonis libron kun 160 taskoj nomitan ≪*Arithmetisch Cubiccosischer Lustgarten*≫[9] ([6], sekcio 2.3, paĝo 150), kie li jam per la titolo montras, ke li havas solvon por tiaj kubaj ekvacioj, kioj ĝis tiam rigardiĝis kiel ≪*casus irreducibilis*≫[10]. Aliaj fontoj ([4], paĝo 110) citas (F.) Vietan[11] dum 1600 post Kristo kiel la eltrovinto de la trigonometria interpretado, per tio nombra solvo estas produktebla, kio – se ĝi estas divenita korekte – devas trapasi kvadratan kontrolokalkuladon por ekzisti analitike kaj neriproĉeble.
La verkinto trovis en la jaro 1992 post Kristo, ke nombra solvo de kuba ekvacio plenumas kvadratan kontrolokalkuladon, en la jaro 2001 post Kristo li trovis substituon, kio estas uzebla por la instrukcio kaj kio gvidas al la kvadrata resolvento anstataŭ al la reduktita ekvacio malpliigante la kalkulolaboron, en la jaro 2012 post Kristo li trovis alternativon je la Kardana solvo. La teoremoj por la adicio de 2 3-aj radikoj ĝis nun ne troviĝis en formo havanta nur kvadratajn radikojn.

2.3.2 Reduktita ekvacio

La reduktita kuba ekvacio tekstas:

$$y^3 + p\,y + q \;=\; 0\,. \tag{20}$$

Por la kazo $p = 0$ *lineara resolvento* en y^3 rezultas.

2.3.3 Kvadrata resolvento

La pli ĝenerala *kvadrata resolvento* en z^3 sekvas per elmultiplikado de la komenco (10) kun $n = 3$ kaj komparo de la koeficientoj. Rezultas 2 ekvacioj en 2 jam nekonataj radikoj z_1 kaj z_2:

$$-z_1^3 - z_2^3 \;=\; q\,; \qquad -3\,z_1\,z_2 \;=\; p\,. \tag{21}$$

[3] latina: sinjoro [(Luka) Pacioli]
[4] latina: sinjoro [(Ŝipione) del Fero]
[5] latina: sinjoro [(Nikolo) Tartalja]
[6] latina: sinrojo [(Ĝeronimo) Kardano]
[7] latina: la granda arto
[8] germana: sinjoro [(Johan) Faŭlhaba]
[9] germana: aritmetika, kube kosinusa plezurĝardeno
[10] latina: nesolvebla kazo
[11] latina: sinjoro [(F.) Vieta]

La solveco de ĉi tia sistemo de ekvacioj per la identeco $z_2 \to -\frac{p}{3\,z_1}$ rezultigas kvadratan ekvacion en z_1^3:

$$z_1^6 + q\,z_1^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 \;=\; 0\,. \tag{22}$$

2.3.4 Solvanta substituo

Kvadrata resolvento en z^3 ankaŭ atingiĝas per aplikado de la substituo

$$x \to \frac{1}{3}\left(z - \frac{3\,b - a^2}{z} - a\right) \tag{23}$$

al la ekvacio $x^3 + a\,x^2 + b\,x + c \;=\; 0$. La solvo x atingiĝas per la solvo de ĉi tia kvadrata resolvento kaj sekvanta resubstituo. Per la 3-aj radikoj rezultas 3 diversaj solvoj x de la kuba ekvacio. La kazo $3\,b \;=\; a^2$ rezultigas *linearan resolventon* en z^3.

2.3.5 Duona laboro

Kiu kredas, ke li nun povas solvi ĉiajn kubajn ekvaciojn, tio trovos alian problemon: La substituo (23) montras, ke x solvas kvadratan ekvacion en z, dume 3-aj radikoj el kvadrataj solvoj rezultas per ambaŭ solvantaj vojoj. La trovita solvo ja estas korekta kaj konfirmas la kontrolokalkuladon, sed estas neuzinde komplika.
La solvoj de la kvadrata resolvento (22) estas:

$$\left(z^3\right)_{1,2} \;=\; -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\,. \tag{24}$$

La resubstituo $y \to z_1 + z_2 \;=\; z_1 - \frac{p}{3\,z_1} \;=\; z_2 - \frac{p}{3\,z_2}$ havas econ, ke interŝanĝo de z_1 kaj z_2 rezultigas la saman solvon y. Per kube radiki rezultas 3 diversaj solvoj y, kioj ankaŭ povas koincidi.
Kiel restotasko restas la serĉo de la kvadrata solvo, kio kongruas kun la termo

$$z_{1,2} \;=\; \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \;=\; A \pm \sqrt{B} \qquad \begin{aligned} z_1 \,+\, z_2 \;&=\; 2\,A \\ z_1 \,-\, z_2 \;&=\; 2\,\sqrt{B} \end{aligned} \tag{25}$$

Kiam la termoj p kaj q estas racionalaj nombroj, tiam per kvadrati la nombran solvon oni ofte povas konkludi la analitikan prezentadon. La divenita, faciligita termo devas trapasi la kvadratan kontrolokalkuladon $y = z_1 - \frac{p}{3\,z_1}$ por klasifikiĝi kiel korekta.

2.3.6 Kube kosinusa

La uzo de la formulo (17) rezultigas la sekvonton el la formulo (25) kun $\mu \in \{0, 1, 2\}$:

$$z_{1,2} \;=\; \frac{\sqrt{-p}}{\sqrt{3}} \left(\text{Kosinuso}\left[\frac{2\,\pi\,\mu}{3}\right] \;\pm\; \mathrm{i}\,\text{Sinuso}\left[\frac{2\,\pi\,\mu}{3}\right]\right)\, \mathrm{e}^{\left(\mp\frac{1}{3}\text{HiperbolaTangentarko}\left[\sqrt{1+\frac{4\,p^3}{27\,q^2}}\right]\right)} \tag{26}$$

La *nesolvebla kazo* $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \;<\; 0$ kaŭzas rezulton kun la kosinuso funkcio ([4], paĝo 110):

$$y \;=\; z_1 \,+\, z_2 \;=\; 2\,\frac{\sqrt{-p}}{\sqrt{3}}\,\text{Kosinuso}\left[\frac{1}{3}\,\left(2\,\pi\,\mu \;-\; \text{Kosinusarko}\left[\frac{3\,q}{2\,p}\,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-p}}\right]\right)\right] \tag{27}$$

Tio rezulto (27) substrekas la rezulton *kube kosinusa* de (Johan) Faŭlhaba (1604 post Kristo).

2.3.7 Speciala Ĉebiŝefa polinomo

Por $\mu = 0$ kaj $p \neq 0$ rezultas la interesa rezulto:

$$Y = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-p}}\,\frac{z_1 + z_2}{2} = \text{Kosinuso}\left[\frac{\text{Kosinusarko}\left[\frac{3\,q}{2\,p}\,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-p}}\right]}{3}\right] \tag{28}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-p}}\,\frac{z_1 - z_2}{2\,\mathrm{i}} = \text{Sinuso}\left[\frac{\text{Kosinusarko}\left[\frac{3\,q}{2\,p}\,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-p}}\right]}{3}\right] \tag{29}$$

La rezulto (28) havas la saman formon ol la Ĉebiŝefaj polinomoj ([5], sekcio 7.1.2.5.1., paĝo 752), sed nun la grado estas la frakcio $\frac{1}{3}$.

2.3.8 Unita cirklo

La problemo estas diskutinda ĉe la unita cirklo, ĉar ĉia potenco de 1 estas 1. Tio funkcias laŭ formulo (28) por $p \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-p}}\,z_{1,2} &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-p}}\sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{\frac{3\,q}{2\,p}\,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-p}} \mp \frac{3}{p}\,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-p}}\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} = \\
Z_{1,2} &= \sqrt[3]{X \mp \sqrt{X^2 - 1}} = \sqrt[3]{X \pm \mathrm{i}\sqrt{1 - X^2}} \\
&= \mathrm{e}^{\left(\pm\frac{\mathrm{i}}{3}\,\text{Tangentarko}\left[\frac{\sqrt{1-X^2}}{X}\right]\right)} = \mathrm{e}^{\left(\pm\frac{\mathrm{i}}{3}\,\text{Kosinusarko}[X]\right)}, \qquad X = \frac{3\,q}{2\,p}\,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-p}}\,.
\end{aligned} \tag{30}$$

Nun laŭ la formuloj (17, 16) la absoluta valoro de (30) estas 1, la fazo Z havas nur 1 variablon X. La sumo $\frac{Z_1+Z_2}{2}$ estas la kosinuso de la fazo de la solvo de la reduktita kuba ekvacio:

$$Y = \frac{Z_1 + Z_2}{2} = \frac{\sqrt[3]{X - \sqrt{X^2 - 1}}}{2} + \frac{\sqrt[3]{X + \sqrt{X^2 - 1}}}{2}\,. \tag{31}$$

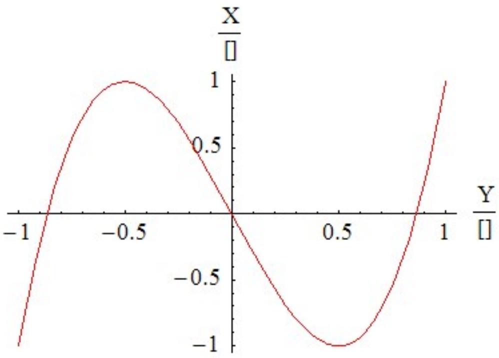
Laŭ Rothe ([2], tasko 13.d, paĝoj 8-9) la 3-a potenco de la rezulto (31) estas kalkulinda:

$$Y^3 = \frac{(Z_1 + Z_2)^3}{8} = \frac{X + 3\,Y}{4}\,. \tag{32}$$

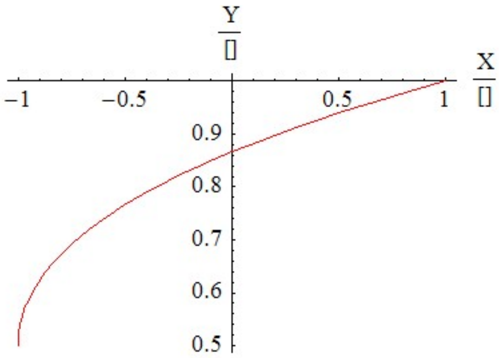
Nun la solvo $X \to \text{Kosinuso}[3\,\phi], Y \to \text{Kosinuso}[\phi]$ validas ([5], sekcio 2.5.2.1.3, paĝo 181). La resubstituo de X kaj Y gvidas reen al (20), la *reduktita kuba ekvacio* $y^3 + p\,y + q = 0$.

2.3.9 Trionigi angulon

Ekzistas teoremo por simpligi la rezulton (28), sed ĝis nun ĝi *ne* troviĝis. Tio teoremo ebligas simpligi termojn, kioj ekrezultas dume la solvo de la algebraj ekvacioj de la 5-a grado. Metodo por trionigi ion ajn angulon ekzistas per faldi paperon ([7]; [8], sekcio 46, paĝoj 91-92), tial la ekzistado de la teoremo jam montriĝis. Ĝis nun tio faldanta metodo ne helpis klarigi la problemojn de la algebro, nur la ekvacio (32) rezultis ankaŭ per tio.



Ilustraĵo 1: La Ĉebiŝefa polinomo de la 3-a grado



Ilustraĵo 2: La Faŭlhabaa fazofunkcio

2.3.10 La Faŭlhabaa fazofunkcio

La Faŭlhabaa fazofunkcio $Y[X]$ havas simplan inversan funkcion, nome:

$$X[Y] \;=\; \text{Kosinuso}\,[3\,\text{Kosinusarko}[Y]] \;=\; 4\,Y^3 - 3\,Y\,. \tag{33}$$

Ĉi tia Ĉebiŝefa polinomo de la 3-a grado havas la grafikaĵon de la ilustraĵo 1. Nun ĉe la inversa funkcio, la Faŭlhabaa fazofunkcio, nur la dekstra parto uziĝas kaj ĝis nun havas la formon:

$$Y[X] \;=\; \text{Kosinuso}\left[\frac{\text{Kosinusarko}[X]}{3}\right] \;=\; \frac{\sqrt[3]{X+\sqrt{X^2-1}} \;+\; \sqrt[3]{X-\sqrt{X^2-1}}}{2}\,. \tag{34}$$

Ĉi tia Faŭlhabaa fazofunkcio havas la grafikaĵon de la ilustraĵo 2. La ĝenerala formo de la Ĉebiŝefaj polinomoj analoge devenas de la ekvacio (16) por ia ajn n kaj ia ajn X:

$$T_n[X] \;=\; \text{Kosinuso}\,[n\,\text{Kosinusarko}[X]] \;=\; \frac{\left(X+\sqrt{X^2-1}\right)^n \;+\; \left(X-\sqrt{X^2-1}\right)^n}{2}\,. \tag{35}$$

Ĉi tia formulo (35) ebligas teoremoj ol $T_n[X]^2 = \frac{T_{2\,n}[X]+1}{2}$, $T_n[X]^3 = \frac{T_{3\,n}[X]+3\,T_n[X]}{4}$, aŭ $T_{-n}[X] = T_n[X]$, kaj tiaj teoremoj eble estos la ŝlosiloj por solvi la algebrajn ekvaciojn de la n-a grado analitike per $T_0[X] = 1$, $T_1[X] = T_{-1}[X] = X$, $T_{n+1}[X] = 2\,X\,T_n[X] - T_{n-1}[X]$ kaj tiel plu.

2.3.11 Ekzemplo 1-a

La *nesolvebla kazo* kaŭzas problemojn, kioj klariĝas dume kontrolokalkulado. Do nun la ekzemplo

$$(x-2)(x-3)(x-5) \;=\; x^3 - 10\,x^2 + 31\,x - 30 == 0 \tag{36}$$

per la substituo $x \to y + \frac{10}{3}$ havas la *reduktitan normalan formon*:

$$y^3 - \frac{7}{3}\,y - \frac{20}{27} \;=\; 0\,. \tag{37}$$

La Kardana formulo gvidas al

$$y_1 \;=\; \sqrt[3]{\frac{10}{27} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}} + \sqrt[3]{\frac{10}{27} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}} \;=\; \frac{5}{3}\,. \tag{38}$$

La absoluta valoro de la solvo (38) estas $\sqrt{-\frac{4\,p}{3}} \;=\; \frac{2\sqrt{7}}{3}$. Per tio rezultas la *fazo* de la kompleksvalora solvo:

$$\begin{aligned} Y_1 \;&=\; \text{Kosinuso}\left[\frac{\text{Kosinusarko}\left[\frac{10}{7\sqrt{7}}\right]}{3}\right] \;=\; \text{Kosinuso}\left[\frac{\text{Tangentarko}\left[\frac{9\sqrt{3}}{10}\right]}{3}\right] \;= \\ &=\; \frac{3}{2\sqrt{7}}\left(\sqrt[3]{\frac{10}{27} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}} + \sqrt[3]{\frac{10}{27} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}}\right) \;=\; 0.94491118252306806804\ldots\,. \end{aligned} \tag{39}$$

La nombra valoro de $y_1 \;=\; \frac{5}{3}$ (38) nun devas trapasi la kontrolokalkuladon $y \;=\; z - \frac{p}{3\,z}$, kio rezultigas:

$$\frac{2\sqrt{7}}{3}\,Y_1 \;=\; \frac{5}{3} \;=\; z + \frac{7}{9\,z}\,, \qquad z_{1,2} \;=\; \frac{5}{6} \pm \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{6}\,, \qquad z^3_{1,2} \;=\; \frac{10}{27} \pm \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{3}\,. \tag{40}$$

Per tio la matematika truo pri la analitikaj 3-aj radikoj fermiĝis plie. Tia metodo de uzi nombrajn valorojn por produkti analitikajn rezultojn validas kaŭze de la kontrolokalkulado. Eble iam iu trovos analitikan formulon por faciligi la Kardanan formulon (25). La teoremo ekzistas, sed ĝis nun ĝi ne troviĝis.
La polinomodivido de la reduktita normala formo (37) per $y - \frac{5}{3}$ rezultigas $y^2 + \frac{5}{3}\,y + \frac{4}{9} = 0$ kun la radikoj $y_2 = -\frac{1}{3}$ kaj $y_3 = -\frac{4}{3}$. La resubstituo $x = y + \frac{10}{3}$ produktas la 3 solvojn de la ekvacio (36):

$$x_1 \;=\; 5 \qquad x_2 \;=\; 3\,, \qquad x_3 \;=\; 2\,. \tag{41}$$

2.3.12 Ekzemplo 2-a

La ekvacio $\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x-\sqrt{10}\right)\left(x-\sqrt{15}\right) \;=\; 0$ gvidas per la Kardana formulo al la *nesolvebla kazo*, ĉar 3 realaj radikoj aperas. La numera esplorado de la kvradratitaj solvoj fine rezultigas ankaŭ sen analitika metodo la 3 solvojn $x_\nu \;\to\; \sqrt{5\,\nu}$ kun $\nu \;\in\; \{1,2,3\}$. Multaj kubaj solvoj ŝajnas esti pli komplikaj ol ili estas en la konkreta kazo.
Problemoj aperas dum la uzo de la funkcio Tangentarko $\left[\frac{\sqrt{1-X^2}}{X}\right]$, ĉar ĝi nur trovas angulon en la duona periodo. La plej bona vojo por trovi la nombran valoron de (25) kun komplexvaloraj termoj estas la uzo de la funkcio Tangentarko$[\mathrm{x},\mathrm{y}]$ por trovi la angulon en la plena periodo.

2.4 Ekvacioj de la 4-a grado

2.4.1 Historio

La solvo devenas de (L.) Ferrari[12] (1522 ĝis 1565 post Kristo), kiu estis lernanto kaj kunlaboranto de (Ĝeronimo) Kardano (1501 ĝis 1576 post Kristo). Ili publikigis ĝin 1545 post Kristo en la ≪*ars magna*≫[13]. La prezentado de la solvo en kutimaj manlibroj ([4], paĝoj 112-113; [5], sekcio 2.4.2.3., paĝo 133) okazas ankoraŭ sen dedukto kaj kun kazodistingo, kio per detala rigardo rezultas kiel heŭristika naturo, ĉar la solvanta formulo ne ŝanĝas per la diversaj kazoj.
2002 post Kristo la verkinto deduktis la Kardanajn fomulojn ankaŭ por la ekvacioj de la 4-a grado, por ke la mema studado aŭ la instruado povas riĉiĝi. La diversaj deduktoj nun estas prezentinda. La substituoj, kioj gvidas al la resolvento, eble jam estas novaĵo. La specialaj kazoj troviĝis en la jaro 2012 post Kristo. Ĉi tia ĉapitro finiĝis en la jaro 2013 post Kristo.

2.4.2 Reduktita ekvacio

La reduktita normala formo de la ekvacio de la 4-a grado estas:

$$y^4 + p\,y^2 + q\,y + r \;=\; 0\,. \tag{42}$$

Por la kazo $p = q = 0$ ĉi tio estas *lineara resolvento* en y^4. La kazo $q = 0$ nomiĝis kiel *bikvadrata ekvacio*, ĉar ĝi estas kvadrata ekvacio en y^2.

2.4.3 Determinantaj ekvacioj

Per elmultipliki de la komenco (10) kun $n = 4$ kaj sekvanta komparo de la koeficientoj rezultas 3 ekvacioj en la 3 jam nekonataj radikoj z_1, z_2 kaj z_3:

$$\left(\begin{array}{ccc} z_2^4 - 4\,z_1\,z_3\,z_2^2 - \left(z_1^2 - z_3^2\right)^2 & = & r \\ -4\,z_2\,\left(z_1^2 + z_3^2\right) & = & q \\ -4\,z_1\,z_3 - 2\,z_2^2 & = & p \end{array}\right)\,. \tag{43}$$

2.4.4 Kuba resolvento

La komenco (10) kaŭzas nesimetrion en la radikoj z_1 ĝis z_3, tio ebligas eksplicitaj solvoj al z_2:

$$\left(\begin{array}{ccc} z_2^2 & = & 2\,z_1\,z_3 \pm \sqrt{r + \left(z_1^2 + z_3^2\right)^2} \\ \left(z_1^2 + z_3^2\right) & = & -\frac{q}{4\,z_2} \\ 2\,z_1\,z_3 & = & -z_2^2 - \frac{p}{2} \end{array}\right)\,. \tag{44}$$

La pli grandaj komunaj termoj substituiĝas en la 1-a subekvacio, per tio nur jam 1 ekvacio en z_2 rezultas, nome la *kuba resolvento*, tio post sorti de la argumentoj kaj kvadrati estiĝas unusignifa:

$$\left(2\,z_2^2 + \frac{p}{2}\right)^2 \;=\; r + \frac{q^2}{16\,z_2^2}\,. \tag{45}$$

[12] latina: sinjoro [(L.) Ferari]
[13] latina: la granda arto

La substituo $z_2 \to \pm \frac{\sqrt{\zeta}}{2}$ gvidas al la prezentado de la *kuba resolvento* en $\zeta = 4\,z_2^2$ ([5], sekcio 2.4.2.3., paĝo 133):

$$\zeta^3 + 2\,p\,\zeta^2 + \left(p^2 - 4\,r\right)\,\zeta - q^2 \;=\; 0\,. \tag{46}$$

Ĉar por trovi la resolventon la termoj kvadratiĝis, konkreta kontrolokalkulado estas necesa ĉe la radikokalkulado.

2.4.5 2 radikoj 0, 1-a kazo

Por $z_1 = z_3 = 0$ rezultas $q = 0$ kaj $r = \frac{p^2}{4}$. Per tio rezultas la kvadrata ekvacio $\frac{1}{4}\,\left(p + 2\,y^2\right)^2 = 0$ en y^2 kun la 4 solvoj:

$$y_1 \;=\; -\mathrm{i}\sqrt{\frac{p}{2}}, \quad y_2 \;=\; -\mathrm{i}\sqrt{\frac{p}{2}}, \quad y_3 \;=\; \mathrm{i}\sqrt{\frac{p}{2}}, \quad y_4 \;=\; \mathrm{i}\sqrt{\frac{p}{2}}. \tag{47}$$

2.4.6 2 radikoj 0, 2-a kazo

$z_1 = z_2 = 0$ aŭ $z_2 = z_3 = 0$ gvidas al $p = 0$ kaj $q = 0$, nur $-z^4 = r$ restas, tio estas la *lineara resolvento* en z^4. La 4 solvoj de la ekvacio $y^4 + r = 0$ estas:

$$y_1 \;=\; \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\,\sqrt[4]{r}, \quad y_2 \;=\; \frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\,\sqrt[4]{r}, \quad y_3 \;=\; \frac{-1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\,\sqrt[4]{r}, \quad y_4 \;=\; \frac{-1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\,\sqrt[4]{r}. \tag{48}$$

2.4.7 1 radiko 0, 1-a kazo

$z_2 = 0$ gvidas al $q = 0$ kaj al la *bikvadrata ekvacio* $y^4 + p\,y^2 + r = 0$. La solvoj estas:

$$\begin{aligned} y_1 &= -\sqrt{\tfrac{-p-\sqrt{p^2-4\,r}}{2}}, & y_2 &= \sqrt{\tfrac{-p-\sqrt{p^2-4\,r}}{2}}, \\ y_3 &= -\sqrt{\tfrac{-p+\sqrt{p^2-4\,r}}{2}}, & y_4 &= \sqrt{\tfrac{-p+\sqrt{p^2-4\,r}}{2}}. \end{aligned} \tag{49}$$

La bikvadrata ekvacio por $r = \frac{p^2}{4}$ estiĝas tre facila, nome la 1-a kazo kun 2 radikoj 0 validas. Tial la specialaj kazoj estas pripensendaj en la ĝusta vico.

2.4.8 1 radiko 0, 2-a kazo

$z_1 = 0$ (aŭ $z_3 = 0$) gvidas al $z_2 = \pm\,\mathrm{i}\sqrt{\frac{p}{2}}$ kaj $z_3 = \pm\,\mathrm{i}\sqrt{\frac{\pm\,\mathrm{i}\,q}{2\sqrt{2\,p}}}$, tio gvidas al $r = \frac{p^2}{4} + \frac{q^2}{8\,p}$, nome al la ekvacio $y^4 + p\,y^2 + q\,y + \frac{p^2}{4} + \frac{q^2}{8\,p} = 0$. Nun la *kuba resolvento* (46) havas la formon:

$$\zeta^3 + 2\,p\,\zeta^2 - \frac{q^2}{2\,p}\,\zeta - q^2 \;=\; 0 \;=\; \frac{(\zeta + 2\,p)\;(2\,p\,\zeta^2 - q^2)}{2\,p}\,. \tag{50}$$

La lasta termo rezultas per *akra ekvido*, ke $\zeta = -2\,p$ estas nuliganto de la kuba resolvento (50). Per tio rezultas la 3 radikoj de la *speciala kuba resolvento* (50):

$$\zeta_1 = -2\,p, \quad \zeta_2 = -\frac{q}{\sqrt{2\,p}}, \quad \zeta_3 = \frac{q}{\sqrt{2\,p}}. \tag{51}$$

La rezultoj (51) nun laŭ la komenco (10) kun $\mathrm{i} = +\sqrt{-1}$ por $\nu \in \{0;1;2;3\}$

$$y_{(\nu+1)} = \sum_{\mu=1}^{3} \pm \frac{\sqrt{\zeta_\mu}}{2}\, \mathrm{e}^{\left(\frac{2\pi \mathrm{i}\mu\nu}{4}\right)} = \sum_{\mu=1}^{3} \pm \frac{\sqrt{\zeta_\mu}}{2}\, \mathrm{i}^{(\mu\nu)} = \sum_{\mu=1}^{3} \pm \left(\sqrt{-1}\right)^{(\mu\nu)} \frac{\sqrt{\zeta_\mu}}{2} \tag{52}$$

gvidas al la konkretaj rezultoj kun $+\sqrt{\zeta_\mu}$:

$$\begin{aligned} y_1 &= \tfrac{1}{2}\left(+\sqrt{-2p} + \sqrt{\tfrac{-q}{\sqrt{2p}}} + \sqrt{\tfrac{+q}{\sqrt{2p}}}\right), & y_2 &= \tfrac{1}{2}\left(-\sqrt{+2p} - \sqrt{\tfrac{-q}{\sqrt{2p}}} - \sqrt{\tfrac{-q}{\sqrt{2p}}}\right), \\ y_3 &= \tfrac{1}{2}\left(-\sqrt{-2p} + \sqrt{\tfrac{-q}{\sqrt{2p}}} - \sqrt{\tfrac{+q}{\sqrt{2p}}}\right), & y_4 &= \tfrac{1}{2}\left(+\sqrt{+2p} - \sqrt{\tfrac{-q}{\sqrt{2p}}} + \sqrt{\tfrac{-q}{\sqrt{2p}}}\right). \end{aligned} \tag{53}$$

Evidente la rezulto $y_4 = +\sqrt{\frac{p}{2}}$ ne estas solvo de la ekvacio $y^4 + p\,y^2 + q\,y + \frac{p^2}{4} + \frac{q^2}{8p} = 0$.
La formulo (52) ne estas simetria koncerne la interŝanĝo de la 3 radikoj. Tial alia ordo de la radikoj (51) kaŭzas aliajn solvojn kun (52) kaj $\pm\sqrt{\zeta}$:

$$\begin{aligned} y_1 &= \tfrac{1}{2}\left(+\sqrt{\tfrac{+q}{\sqrt{2p}}} + \sqrt{-2p} + \sqrt{\tfrac{-q}{\sqrt{2p}}}\right) &= \tfrac{1}{2}\left(+\sqrt{\tfrac{+q}{\sqrt{2p}}} + \sqrt{-2p} + \sqrt{\tfrac{-q}{\sqrt{2p}}}\right), \\ y_2 &= \tfrac{1}{2}\left(+\sqrt{\tfrac{-q}{\sqrt{2p}}} - \sqrt{-2p} - \sqrt{\tfrac{+q}{\sqrt{2p}}}\right) &= \tfrac{1}{2}\left(-\sqrt{\tfrac{+q}{\sqrt{2p}}} - \sqrt{-2p} + \sqrt{\tfrac{-q}{\sqrt{2p}}}\right), \\ y_3 &= \tfrac{1}{2}\left(-\sqrt{\tfrac{+q}{\sqrt{2p}}} + \sqrt{-2p} - \sqrt{\tfrac{-q}{\sqrt{2p}}}\right) &= \tfrac{1}{2}\left(-\sqrt{\tfrac{+q}{\sqrt{2p}}} + \sqrt{-2p} - \sqrt{\tfrac{-q}{\sqrt{2p}}}\right), \\ y_4 &= \tfrac{1}{2}\left(-\sqrt{\tfrac{-q}{\sqrt{2p}}} - \sqrt{-2p} + \sqrt{\tfrac{+q}{\sqrt{2p}}}\right) &= \tfrac{1}{2}\left(+\sqrt{\tfrac{+q}{\sqrt{2p}}} - \sqrt{-2p} - \sqrt{\tfrac{-q}{\sqrt{2p}}}\right). \end{aligned} \tag{54}$$

La rezultoj (54) estas simetria koncerne la interŝanĝo de la 3 radikoj ζ de la *speciala kuba resolvento* (50). Ĉar kvadratiĝis dume la derivaĵo de la *kuba resolvento* (46), la rezultoj (54) ĉiokaze estas kontrolendaj, ekzemple pro $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1 = \mathrm{i}^2 = (-\mathrm{i})^2$:

$$\begin{aligned} y_{1,3} &= \tfrac{1}{2}\left(\pm\sqrt{\tfrac{q}{\sqrt{2p}}} + \sqrt{-2p} \pm \sqrt{\tfrac{-q}{\sqrt{2p}}}\right) \\ y_{1,3}^2 &= \tfrac{1}{2}\left(-p \pm \sqrt{-q\sqrt{2p}} + \sqrt{\tfrac{-q^2}{2p}} \mp \sqrt{q\sqrt{2p}}\right) \\ y_{1,3}^4 &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{p^2}{2} - \tfrac{q^2}{4p} \mp p\sqrt{-q\sqrt{2p}} - p\sqrt{\tfrac{-q^2}{2p}} \pm p\sqrt{q\sqrt{2p}} \mp q\sqrt{\tfrac{q}{\sqrt{2p}}} - q\sqrt{-2p} \mp q\sqrt{\tfrac{-q}{\sqrt{2p}}}\right) \end{aligned} \tag{55}$$

Ĉiaj 4 kazoj (55,56) rezultigas ĝustajn kontrolojn por $y^4 + p\,y^2 + q\,y + \frac{p^2}{4} + \frac{q^2}{8p} = 0$:

$$\begin{aligned} y_{2,4} &= \tfrac{1}{2}\left(\mp\sqrt{\tfrac{q}{\sqrt{2p}}} - \sqrt{-2p} \pm \sqrt{\tfrac{-q}{\sqrt{2p}}}\right) \\ y_{2,4}^2 &= \tfrac{1}{2}\left(-p \pm \sqrt{-q\sqrt{2p}} - \sqrt{\tfrac{-q^2}{2p}} \pm \sqrt{q\sqrt{2p}}\right) \\ y_{2,4}^4 &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{p^2}{2} - \tfrac{q^2}{4p} \mp p\sqrt{-q\sqrt{2p}} + p\sqrt{\tfrac{-q^2}{2p}} \mp p\sqrt{q\sqrt{2p}} \pm q\sqrt{\tfrac{q}{\sqrt{2p}}} + q\sqrt{-2p} \mp q\sqrt{\tfrac{-q}{\sqrt{2p}}}\right) \end{aligned} \tag{56}$$

La tasko $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$ ankaŭ povas esti ĝusta, tial (Karl Fridriĥ) Gaŭs formulis la valoron $\mathrm{i} = +\sqrt{-1}$. La problemo estas, ke la substituo $\zeta = 4\,z_2^2$ gvidas al 2 solvoj $\pm\frac{1}{2}\sqrt{\zeta}$. Tial la uzo de funkcioj aŭ formuloj, kioj nur havas unu rezulton, ne funkcias ĉe la solvo de algebraj ekvacioj. La kazodiferencigo kaj la kontrolokalkulado estas *necesaj* partoj de la algebro. Ekzistas ebleco de programi tiajn partojn de la algebro ankaŭ por la computora algebro, sed ĝis nun la progamantoj komprenas tro malmulton pri la algebro. La verkinto devis kalkuli la rezultojn (54,55,56) per mano.

2.4.9 Problemoj kun la unusignifeco

La 3 solvoj de la *kuba resolvento* (46) laŭ la nun uzita komenco (10) kunmetiĝas al la solvo de la ekvacio de la 4-a grado. Dume la dedukto de la kuba resolvento ĉiam estas kvadratigenda, tial ne ĉia komenco simila ol (10) gvidas al solvoj. La nun sisteme trovita solvanta strukturo devias de la historia versio de Kardano ([5], sekcio 2.4.2.3., paĝo 133), kie kompleksvalora sumo evitiĝas kaj *la sama* kuba resolvento (46) rezultas:

$$\begin{pmatrix} y_1 & = & \frac{\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}-\sqrt{z_3}}{2} & y_2 & = & \frac{\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3}}{2} \\ y_3 & = & \frac{-\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3}}{2} & y_4 & = & \frac{-\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2}-\sqrt{z_3}}{2} \end{pmatrix} . \tag{57}$$

La determinantajn ekvaciojn, kioj rezultas per ĉi tia same ebla komenco (57), montras la sekvonta sistemo:

$$\begin{pmatrix} z_1^2+z_2^2+z_3^2-2\,z_1\,z_2-2\,z_1\,z_3-2\,z_2\,z_3 & = & 16\,r \\ \sqrt{z_1}\,\sqrt{z_2}\,\sqrt{z_3} & = & q \\ -z_1-z_2-z_3 & = & 2\,p \end{pmatrix} . \tag{58}$$

Ĉi tia sistemo de ekvacioj estas tre simetria koncerne la interŝanĝo unu la alian de la 3 radikoj kaj gvidas per plia kalkuladopenado al la sama *kuba resolvento* (46) en $\zeta = z_2$ anstataŭ $\zeta = 4\,z_2^2$. Nun *speciala kuba resolvento* (50) troviĝis, kies 3 radikoj estas konata sen la uzo de la Kardana formulo (25) de la 3-a grado. Ankaŭ en ĉi tia kazo dufoje da solvoj ekzistas ol taŭgas.
La kontrolo de la solvoj (54) en la sistemo (58) gvidas al la kazo

$$\left(+\sqrt{\zeta_1}\right)\left(+\sqrt{\zeta_2}\right)\left(+\sqrt{\zeta_3}\right) = -\sqrt{\frac{2\,p}{2\,p}\,q^2} = -q\,, \tag{59}$$

kio montras, ke alia kazo troviĝis ol per la Kardana vojo. Laŭ manlibro ([5], sekcio 2.4.2.3., paĝo 133) ĉi tia kazo povas okazi, sed tiam la Kardana formulo bezonas atenton. Tial la Kardana formulo kaj la komenco (10) ĝis nun en konkretaj kazoj gvidis al la samaj 4 solvoj.
La demando, kiom da taŭgaj solvoj algebra ekvacio de la n-a grado enhavas, estas grava kaj malfacile klarigenda. 1799 post Kristo (Karl Fridriĥ) Gaŭs havis sian doktoran ekzamenon pri la unusignifecon de la n radikoj de algebra ekvacio de la n-a grado ([1], § 31, paĝoj 187-190). Ĝis nun la verkinto ne ricevis kopion de ĉi tia ellaborado de (Karl Fridriĥ) Gaŭs pri la *fundamenta teoremo de la algebro*. Aliu sekvonta kompletigu ĉi tian taskon.

2.4.10 Solvanta substituo

Plia ebleco por trovi la *kuban resolventon* (46) en $\zeta = 4\,z^2$ estas la sekvonta substituo de la reduktita ekvacio (42) de la 4-a grado:

$$y \to z \pm \frac{\sqrt{-q+\sqrt{q^2-4\,z^2\,\left(p+2\,z^2\right)^2}}}{\sqrt{8\,z}} \mp \frac{\sqrt{-q-\sqrt{q^2-4\,z^2\,\left(p+2\,z^2\right)^2}}}{\sqrt{8\,z}} . \tag{60}$$

La kontrolokalkulado pri la substituo (60) funkcias analoge ol (55) aŭ (56). Entute montriĝis, ke la postuloj kreskas kun kreskanta grado n.

2.5 Ekvacioj de la 5-a grado

2.5.1 Historio

Kiam la reduktita ekvacio de la 5-a grado estas lineara en y^5, tiam ĝi estas solvebla, ĉar *lineara resolvento* ĉeestas. Por trovi *kvadratan resolventon* en y^5 donas Rothe ([2], tasko 13.e, paĝoj 8-9) vojomontrantan ekzemplon, kie la inversigo de $x^5 - 5\,p\,x^3 + 5\,p^2\,x \;=\; y$ informiĝas kiel

$$x \;=\; \sqrt[5]{\frac{1}{2}\,y + \sqrt{\frac{1}{4}\,y^2 - p^5}} + \sqrt[5]{\frac{1}{2}\,y - \sqrt{\frac{1}{4}\,y^2 - p^5}}\,. \tag{61}$$

Ekvacioj de la 5-a grado rigardiĝas kiel malofte solvitaj.

2.5.2 Reduktita ekvacio

La reduktita ekvacio de la 5-a grado tekstas kiel:

$$y^5 + p\,y^3 + q\,y^2 + r\,y + s \;=\; 0\,. \tag{62}$$

Ĝi estas produktebla per la produta komenco (10) kun $n = 5$.

2.5.3 Determinantaj ekvacioj

Per komparo de la koeficientoj oni ricevas 4 determinantajn ekvaciojn en 4 jam nekonataj radikoj z_1 ĝis z_4:

$$\left(\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} -\,(z_1^5 + z_2^5 + z_3^5 + z_4^5) \\ -5\;(z_1\,z_3^2\,z_4^2 + z_1^2\,z_2\,z_3^2 + z_2^2\,z_3\,z_4^2 + z_1^2\,z_2^2\,z_4) \\ +5\;(z_1^3\,z_3\,z_4 + z_1\,z_2^3\,z_3 + z_2\,z_3^3\,z_4 + z_1\,z_2\,z_4^3) \end{array} & = & s \\ \\ \begin{array}{c} 5\;(z_2^2\,z_3^2 + z_1^2\,z_4^2) \\ -5\;(z_1^3\,z_2 + z_2^3\,z_4 + z_1\,z_3^3 + z_3\;z_4^3 + z_1\,z_2\,z_3\,z_4) \end{array} & = & r \\ \\ -5\;(z_1^2\,z_3 + z_1\,z_2^2 + z_3^2\,z_4 + z_2\,z_4^2) & = & q \\ \\ -5\;(z_2\,z_3 + z_1\,z_4) & = & p \end{array}\right). \tag{63}$$

Ĝenerala solvo de ĉi tia sistemo de ekvacioj ĝis nun ne sukcesiĝis.

2.5.4 Nur 1 radiko

Kiam 3 de la 4 radikoj estas 0, tiam faciliĝas la sistemo de ekvacioj (63) al la sekvonta ekkono:

$$z^5 \;=\; -s\,; \qquad 0 \;=\; r \;=\; q \;=\; p\,. \tag{64}$$

Ĉi tia kazo ĉiam estas solvebla.

2.5.5 2 radikoj 0, 1-a kazo

Kiam 2 radikoj estas 0, tiam validas en la 1-a kazo $z_2 = z_3 = 0$ aŭ $z_1 = z_4 = 0$, tial la sistemo de ekvacioj (63) ekzemple reduktas al la sekvonta tasko:

$$\begin{pmatrix} -(z_1^5 + z_4^5) & = & s\,; & 5\,z_1^2\,z_4^2 & = & r \\ 0 & = & q\,; & -5\,z_1\,z_4 & = & p \end{pmatrix}. \tag{65}$$

Kiel oni facile povas kompreni, la baza tipo de la apartena ekvacio tekstas: $y^5 + p\,y^3 + \frac{p^2}{5}\,y + s \;=\; 0$. Do restas 2 ekvacioj en 2 nekonatoj z_1 kaj z_4, kioj gvidas al la substituo $z_4 \to -\frac{p}{5\,z_1}$. Per tio sekvas *kvadrata resolvento* en $z^5 \;=\; z_1^5$:

$$z^{10} + s\,z^5 - \left(\frac{p}{5}\right)^5 \;=\; 0\,, \tag{66}$$

kies solvo tekstas analoge al la kuba solvo (24):

$$\left(z^5\right)_{1,4} \;=\; -\frac{s}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{5}\right)^5}\,. \tag{67}$$

Ĉi tia ekzemplo por solvebla ekvacio de la 5-a grado jam montriĝis ĉe la rezulto (61).

2.5.6 2 radikoj 0, 2-a kazo

En la 2-a kazo validas $z_1 = z_2 = 0$, $z_1 = z_3 = 0$, $z_2 = z_4 = 0$, aŭ $z_3 = z_4 = 0$. Per tio la sistemo de ekvacioj (63) estas reduktebla ekzemple al la sekvonta tasko:

$$\begin{pmatrix} -(z_1^5 + z_2^5) & = & s\,; & -5\,z_1^3\,z_2 & = & r \\ -5\,z_1\,z_2^2 & = & q\,; & 0 & = & p \end{pmatrix}. \tag{68}$$

Ĉi tioj estas 3 ekvacioj por 2 nekonatoj z_1 kaj z_2, tial en la kazo de la solvo plia rilato inter q, r kaj s rezultas, krome validas $p = 0$. La 2-a kaj la 3-a ekvacio pokaze solviĝas lineare al z_2 kaj z_1, tiam la rezultoj kruce substituiĝas. Tio rezultigas:

$$\begin{pmatrix} s & = & \frac{r^2}{5\,q} - \frac{q^3}{25\,r}\,; & z_1^5 & = & -\frac{r^2}{5\,q} \\ z_2^5 & = & \frac{q^3}{25\,r}\,; & p & = & 0 \end{pmatrix}. \tag{69}$$

Konsidere al ĉi tiaj solvoj rapide rimarkiĝas, ke manipuli ĉi tiajn ekvaciojn dependas de lerteco por trovi solvon. La rilato inter q, r kaj s rezultas per la kontrolokalkulado.
La verkinto nur en la jaro 2008 post Kristo atingis ĉi tian solvon, kio kompreneble per radikado de la 5-aj radikoj gvidas al 5 diversaj rezultoj de la speco $y = z_1 + z_2$. Ĉi tia kazo eble ne jam troviĝis ĉe la literaturo.

2.5.7 1 radiko 0

Kiam 1 de la 4 radikoj en la determinantaj ekvacioj (63) estas 0, tiam rezultas nun nur jam 1 kazo, kio diskutebliĝas ekzemple por $z_4 \to 0$. La reduktita sistemo de ekvacioj (63) tekstas:

$$\left(\begin{array}{lcl} -\,(z_1^5 + z_2^5 + z_3^5) - 5\,z_1^2\,z_2\,z_3^2 + 5\,z_1\,z_2^3\,z_3 & = & s \\ 5\,z_2^2\,z_3^2 - 5\,(z_1^3\,z_2 + z_1\,z_3^3) & = & r \\ -5\,(z_1^2\,z_3 + z_1\,z_2^2) & = & q \\ -5\,z_2\,z_3 & = & p \end{array} \right). \tag{70}$$

Ĉi tia sistemo de ekvacioj kiel la ĝenerala sistemo (63) de sube ĝis supre gvidas al lineara, kvdrata, kuba kaj resta ekvacio. Per la kontrolokalkulado antaŭvideble ankaŭ ĉi tie rilato inter p, q, r kaj s troviĝos. La substituo de la lineara solvo $z_3 = -\frac{p}{5\,z_2}$ rezultigas:

$$\left(\begin{array}{lcl} -z_1^5 - z_2^5 + \frac{p^5}{3125\,z_2^5} - \frac{p^2\,z_1^2}{5\,z_2} - p\,z_1\,z_2^2 & = & s \\ \frac{p^2}{5} - 5\,z_1^3\,z_2 + \frac{p^3\,z_1}{25\,z_2^3} & = & r \\ \frac{p}{z_2}\,z_1^2 - 5\,z_2^2\,z_1 - q & = & 0 \end{array} \right). \tag{71}$$

Nun la plej facila ekvacio estas kvadrata ekvacio en z_1, kies solvo tekstas:

$$(z_1)_{1,2} = \frac{5\,z_2^3}{2\,p} \pm \frac{\sqrt{z_2}\sqrt{25\,z_2^5 + 4\,p\,q}}{2\,p} \tag{72}$$

Kiam ĉi tia rezulto substituiĝas en la determinantaj ekvacioj (71), tiam rezultas 2 ekvacioj en z_2. Certe ebliĝas izoli po la radikan termon el ekvacio (72) kaj kvadrati po la ekvacioj, plue tiam nur rezultas jam termoj en z_2^5:

$$\left(\begin{array}{cc} \left(-\frac{p\,q}{5} - s + \frac{p^5}{3125\,z_2^5} - 6\,z_2^5 - \frac{25\,q^2\,z_2^5}{2\,p^3} - \frac{625\,q\,z_2^{10}}{2\,p^4} - \frac{3125\,z_2^{15}}{2\,p^5}\right)^2 & = \\ (4\,p\,q\;+\;25\,z_2^5)\left(\sqrt{z_2^5}\;+\;\frac{q^2\sqrt{z_2^5}}{2\,p^3}\;+\;\frac{75\,q\sqrt{z_2^{15}}}{2\,p^4}\;+\;\frac{625\sqrt{z_2^{25}}}{2\,p^5}\right)^2 & ; \\ \left(\frac{3\,p^2}{10}\;-r-\;\frac{75\,q\,z_2^5}{2\,p^2}\;-\;\frac{625\,z_2^{10}}{2\,p^3}\right)^2 & = \\ (4\,p\,q\;+\;25\,z_2^5)\left(-\frac{p^2}{50\sqrt{z_2^5}}\;+\;\frac{5\,q\sqrt{z_2^5}}{2\,p^2}\;+\;\frac{125\sqrt{z_2^{15}}}{2\,p^3}\right)^2 & . \end{array} \right) \tag{73}$$

La elmultiplikado kaj poni de po ĉiaj termoj al la maldekstra flanko de la ekvacioj malŝlosas la sistemon de ekvacioj: Rezultas la serĉata *kuba resolvento* en $\zeta = z_2^5$ kaj plua ekvacio, kio la jam nekonatan relacion inter p, q, r kaj s por la ĉi tie rigardata speciala kazo eltrovas:

$$\left(\begin{array}{rcl} \left(\frac{p}{5}\right)^{15} - 2\left(\frac{p}{5}\right)^{10}\left(\frac{p\,q}{5} + s\right)\;\;\zeta & & \\ -\left(\frac{p}{25}\right)^5 (12\,p^5 - 100\,p^2\,q^2 - 1250\,p\,q\,s - 3125\,s^2)\;\;\zeta^2 & & \\ -\frac{1}{5^6}\,(9\,p^6\,q - 5\,p^3\,q^3 + 5\,q^5 - 60\,p^5\,s - 125\,p^2\,q^2\,s)\;\;\zeta^3 & & \\ +\frac{p}{625}\,(2\,p^4 - 10\,p\,q^2 + 125\,q\,s)\,\zeta^4 + s\,\zeta^5 + \zeta^6 & = & 0 \end{array} \right); \tag{74}$$

$$\left(\begin{array}{rcl} \frac{p^8\,q}{3125} - \frac{p^3}{125}\,(2\,p^4 + 10\,p\,q^2 - 15\,p^2\,r + 25\,r^2)\;\;\zeta & & \\ +\,q\,(2\,p^3 + 5\,q^2 - 15\,p\,r)\,\zeta^2 + 25\,(p^2 - 5\,r)\,\zeta^3 & = & 0 \end{array} \right). \tag{75}$$

Nun la timata problemo de la neakordigebleco de la kubaj radikoj kaj 5-aj potencoj solviĝis per kuba ekvacio en $\zeta = z_2^5$ esti solvenda. La *kuba resolvento* (75) do troviĝis! Ĝi tute estas sendependa de la valoro s, por kio la ekvacio (74) estas kvadrata ekvacio.
Per substituo de la solvo de la *kuba resolvento* (75) en la resta ekvacio (74) ekaperas problemoj, kun kioj estas ligita, ke la teoremo por la simpligo de kubaj radikoj en la senco de la kvadrata solvo de la ekvacio (25) iam mankas. Per tio la verkinto ne sukcesis montri per simplaj termoj la kondiĉon inter p, q, r kaj s, kio sendube ekzistas kaj kio gvidas al la nun traktita speciala kazo de la ekvacioj de la 5-a grado. Pli ĝrave ŝajnas esti ekzameninda, ĉu la solvo de kubaj ekvacioj en termoj kun nur kvadrataj radikoj ĉiam estas ebla. Eble ĉi tio solvus malnovan problemon de la greka matematiko, kie ŝajnas esti malebla konstrui la nombron $\sqrt[3]{2}$ per cirkelo kaj liniilo. La kalkuladolaboro kun tiel ingegaj termoj ankaŭ per *Mathematica*[14] estas granda. La verkinto tial preferas la prezentadon de la iam trovitaj rezultoj kaj ĝojas pri tio, ke sekvonta matematikisto per ĉi tia helpo povas atingi ankaŭ la ĝeneralan solvon de la algebraj ekvacioj de la 5-a kaj pli alta grado. La devizo de (Karl' Fridriĥ) Gaŭs (1777 ĝis 1855 post Kristo) ankaŭ tekstas: ≪*pauca, sed matura.*≫[15] (latina: ≪malmulta, sed plenmatura≫; [3], paĝo 127)). Sen la gvidanta laboro de Gaŭs ni eventuale hodiaŭ ne havus precizan ideon pri tio, kiel $\mathrm{i} = +\sqrt{-1}$ estas uzinda kaj kiel kalkulenda kun tio.

3 Pliaj eblecoj

3.1 Devioj ĉe Kardano kaj Ferari

La komenco (10) nur 1 de kelkaj eblecoj estas. Iam Ferari kaj Kardano ĉe ilia historia solvo (57) devias de ĝi. Fine dependas nur de tio, ke ĉiaj n radikoj de algebra ekvacio de la n-a grado estas lineare sendependaj kaj faras la koeficienton $c_{(n-1)}$ al 0 en la sumo (11). Tial ankaŭ aliaj determinantaj ekvacioj ebliĝas krom ili, kioj ĉi tie traktiĝis.

3.2 La nekompleco de la Galoaa teorio?

Ĉi tia ebleco ankaŭ (Évariste) Galois[16] ([4], paĝoj 116-117) ŝajne ne atentis, ĉar sole por $n = 5$ minimume $2^4 = 16$ diversaj sistemoj de ekvacioj de la speco (63) estas ekzamenendaj kaj motivite rifuzendaj, antaŭ ol nesolvebleco de la algebraj ekvacioj de la 5-a grado estas rigardenda kiel pruvita. La kalkuladotempo, kio por tio bezoniĝas, taksebliĝas por la kalkulado per mano minimume kiel 1 monato, por la kontrolokalkulado de la rezultoj certe kiel la sama tempo, tial minimume 32 personomonatoj laborotempo bezoniĝas. Per pliboniĝita komputoralgebro, kio ankaŭ termojn kun longaj frakcioj certe kaj rapide povas transformi, ĉi tia problemo nun denove kaj pli intense ol antaŭe povas komenciĝi. *Matematika* 3.0.0 bezonis ĉe computoro kun 433 megaherco taktofrekvenco ĉirkaŭ 200 sekundoj por kalkuli la determinantajn ekvaciojn (63) en 1 el minimume 16 kazoj.
Ĉi tia konsiderado eble relativiĝas per pripensado, ke la 2^4 eblecoj ĉiufoje devenas per interŝanĝo $z_\mu \to -z_\mu$, kio ne ŝanĝas la determinantaj ekvacioj en ilia naturo. Krome ekzistas ĝis nun nur

[14][Matematika], programo de sinjoro (Stephen) Wolfram [(Stifen) Wolfram], Usono
[15][paŭka, sed matura]
[16]franca: sinjoro [(Evarist') Galoa'] (1811 ĝis 1832 post Kristo)

1 varianto (63), kio enhavas *lineare sendependaj* faktoroj kaj gvidas al pure realaj koeficientoj de la determinantaj ekvacioj.

3.3 Eblaj paralogismoj

Pruvi neeblecon bezonas la elĉerpadon de ĉiaj eblaj variantoj. Nun ĉe la ekzemplo de la algebraj ekvacioj de la 4-a grado montriĝos, kio okazeblas, kiam anstataŭ de *akra ekvido* (kiel montrita) la sistemo de ekvacioj (43) automatigeble solviĝas, kio nun gvidis al la *kuba resolvento* (46):
La substituo de la *lineara* solvo $z_3 = -\frac{p+z_2^2}{4\,z_1}$ rezultigas la sekvontajn restekvaciojn:

$$\left(\begin{array}{lcl} -\left(\frac{p}{4}\right)^4 + \frac{p^2\,z_1^4}{8} - z_1^8 - \frac{p^3\,z_2^2}{32} + \frac{3\,p\,z_1^4\,z_2^2}{2} & & \\ -\frac{3\,p^2\,z_2^4}{32} + \frac{7\,z_1^4\,z_2^4}{2} - \frac{p\,z_2^6}{8} - \frac{z_2^8}{16} - r\,z_1^4 & = & 0\,; \\ 4\,z_2\,z_1^4 + q\,z_1^2 + z_2\left(\frac{p^2}{4} + p\,z_2^2 + z_2^4\right) & = & 0\,. \end{array}\right) \tag{76}$$

La suba de ĉi tiaj ambaŭ ekvacioj povas kompreniĝi kiel *kvadrata ekvacio* en z_1^2 kaj solviĝi:

$$(z_1^2)_{1,2} = -\frac{q}{8\,z_2} \pm \frac{\sqrt{q^2 - 4\,p^2\,z_2^2 - 16\,p\,z_2^4 - 16\,z_2^6}}{8\,z_2} \tag{77}$$

Ĉi tia rezulto (77) en la supra ekvacio de (76) substituiĝas, poste la radikoj al unu flanko kaj la resto al la alia flanko ordiĝas, antaŭ ol kvadratiĝas. Ĉi tio rezultigas la sekvontan interrezulton:

$$\begin{array}{r} \Big(-\frac{q^4}{512} + \frac{3\,p^2\;q^2\,z_2^2}{256} - \frac{q^2\,r\,z_2^2}{32} - \frac{p^4\,z_2^4}{64} + \frac{5\,p\,q^2\,z_2^4}{64} + \frac{p^2\,r\,z_2^4}{16} \\ -\frac{3\,p^3\,z_2^6}{16} + \frac{9\,q^2\,z_2^6}{64} + \frac{p\,r\,z_2^6}{4} - \frac{13\,p^2\,z_2^8}{16} + \frac{r\,z_2^8}{4} - \frac{3\,p\,z_2^{10}}{2} - z_2^{12}\Big)^2 \quad = \\ (q^2 - 4\,p^2\,z_2^2 - 16\,p\,z_2^4 - 16\,z_2^6)\left(-\frac{q^3}{512} + \frac{p^2\,q\,z_2^2}{128} - \frac{q\,r\,z_2^2}{32} + \frac{p\,q\,z_2^4}{16} + \frac{q\,z_2^6}{8}\right)^2 \end{array} \tag{78}$$

Per la helpo de *Matematika* 3.0.0 kaj la funkcio **Simplify**[17] la rezulto simpliĝas kiel sekvonta per tio, ke ankaŭ linearaj faktoroj ekkoniĝas kaj forfendiĝas:

$$\left(\frac{z_2}{4}\right)^4 \left(\frac{p + 2\,z_2^2}{4}\right)^4 \left(q^2 - 4\left(p^2 - 4\,r\right)z_2^2 - 32p\,z_2^4 - 64\,z_2^6\right)^2 = 0 \tag{79}$$

Kun $z_3 = -\frac{p+2\,z_2^2}{4\,z_1}$ rapide klariĝas, ke ĉi tia ekvacio por la trovita kazo $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$ kaj $z_3 \neq 0$ gvidas al la *kuba resolvento* (46) en $\zeta = 4\,z_2^2$. Do troviĝis kazo, per kio la sistema surpaŝado de la solvovojo gvidas al rezulto, kio ne estas la sama ol la trovata *resolvento*, sed *enhavas* ĝin.
Do konsekvence ĝis la fino estas kalkulenda, antaŭ ol oni rajtas konkludi nesolveblecon por la respektiva n. Por $n \geq 5$ la problemo ekaperis, ke la teoremo de la speco (25) ekzistas, sed ankoraŭ estas nekonata nur en termoj de kvadrataj radikoj. Per tio la Galoaa teorio minimume ekskuiĝis.
Tio estis montrenda. (latina: *quod erat demonstrandum*[18].)

[17] [simplifaj], angla: **Simpligu**
[18] [kvod erat demonstrandum]

4 Elvido

Per tio montriĝis, kiel ĝis la *kuba resolvento* ĉe algebra ekvacio de la n-a grado estas procedenda, do en tiaj kazoj, kie ĝis 3 el $(n-1)$ radikoj de la apartena resolvento estas malsama ol 0.
La principa solvebleco de ĉiaj algebraj ekvacioj de la n-a grado per la produtokomenco (10) eksplicite montriĝis. Ĉe tio rezultas por ekvacio de la n-a grado $(n-1)$ radikoj z_μ el respektiva *resolvento* de la $(n-1)$-a grado. Tio ankaŭ validas por $n \geq 5$. La solvo de determinantaj ekvacioj de la speco (63) en ĉi tian *resolventon* kelkfoje povas esti komplika. Ĉi tio tamen ne estas pruvo de la nesolvebleco.
Por sukcesi ĉe la algebra solvo ankaŭ fajnigecon de la radikoj z_μ povas celiĝi, kio komence gvidas en fareblan kazodistingon, ĉar la subpolinomo ĉe la dekstra flanko de la ekvacio (7) maksimume estas de la grado $(n-1)$.
Plia celenda parta rezulto estas kalkuladomaniero, kio gvidas al la reduktita resolvento. Ilustre per tio la centro estas konata, ĉirkaŭ kio la radikoj de 1 kalkuliĝas.
Pliaj interesaj studadoj estas radikoteoremoj, kioj ebligas la forfendon de lineara faktoro aŭ ankaŭ de faktoroj de la kvadrata aŭ pli alta ordo el reduktita ekvacio de la n-a grado.
Kio de la ekzistantaj eblecoj fine gvidas en sukceson, tio estas atendenda. La algebraj ekvacioj ĉiukaze ankoraŭ taŭgas por ekzerci modestecon koncerne analitika solvebleco. *Nesolvebleco* tamen povas *pruviĝi* nur en la kadro de provizora laborohipotezo, kio markas la ĉiufoje aktualan staton de la esplorado.

5 Danko

Ĉi tia skizo ne financa subvenciiĝis kaj tamen povis maturiĝi dume kelkaj jaroj. Por sugestoj kaj korektoj la verkinto dankos. La verkinto dankas al

- (Hanns-Georg) Kilian[19] por la kuraĝigo al ĉi tia ellaboraĵo,
- (Stephen) Wolfram[20] por la programado de fidinda *Matematika* kerno,
- (Gerd) Baumann[21] por la instruo de la *Matematika* programado,
- (Jörg) Volkmann[22] por la diskutado,
- (Franz) Zeller[23] por la instruado de la Esperanto,
- (Armin) Kadow[24] por la helpo dume la tradukado kaj
- (Laurent) Philippe[25] por plibonigi lian uzon de la Esperanto.

[19]germana: sinjoro [(Hans-Georg) Kilian], Ulm /Danubo (Germanujo)
[20]angla: sinjoro [(Stifen) Wolfram], Usono
[21]germana: sinjoro [(Gerd) Baŭman], Ulm /Danubo, Munkeno (Germanujo) kaj Kairo (Egiptujo)
[22]germana: sinjoro [(Jerg) Volkman], Wolfsburg (Germanujo)
[23]germana: sinjoro [(Franc) Cela], Aalen (Germanujo)
[24]germana: sinjoro [(Armin) Kado], Aalen (Germanujo)
[25]franca: sinjoro [(Loro') Filip'], Francujo

Literaturo

[1] (R.) Rothe[26], *Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker, Ingenieure [Supera matematiko for matematikistoj, fisikistoj, inĝenieroj]*, parto **I**, B. G. Teubner eldoneja asocio, Lepsiko, 14-a eldono, (1954)

[2] (R.) Rothe, *Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker, Ingenieure [Supera matematiko for matematikistoj, fisikistoj, inĝenieroj]*, parto **IV**, B. G. Teubner eldoneja asocio, Lepsiko, 9-a eldono, (1955)

[3] (Erich) Worbs[27], *Carl Friedrich Gauß - Ein Lebensbild [(Karl' Fridriĥ) Gaŭs - biografio]*, Koehler & Amelang, Lepsiko, 2-a plibonigita eldono, (1955)

[4] (W.) Gellert[28], (H.) Küstner[29], (M.) Hellwich[30], (H.) Kästner[31], (H.) Reichardt[32], *Kleine Enzyklopädie Mathematik [Malgranda enciklopedio matematika]*, VEB bibliografia instituto, Lepsiko, 9-a mallongigita eldono, (1974)

[5] (I. N.) Bronstein[33], (K. A.) Semendjajew[34], (G.) Grosche[35], (V.) Ziegler[36], (D.) Ziegler[37], *Taschenbuch der Mathematik [Manlibro de la matematiko]*, komuna disdono Naŭka, Moskvo kaj BSB B. G. Teubner eldoneja asocio, Lepsiko, 23-a eldono, (1987)

[6] (Kurt) Hawlitschek[38], *Johann Faulhaber 1580-1635 [(Johano) Faŭlhaba 1580 ĝis 1635 post Kristo]*, Publikaĵoj de la urbobiblioteko de Ulm /Danubo, volumo **18**, (1995)

[7] (Hans-Wolfgang) Henn[39], *Oregamics – Papierfalten mit mathematischem Spürsinn [Oregamikoj – faldi paperon kun matematika spursento]*, Die neue Schulpraxis [La nova lerneja praktiko], kajero **6/7**, (2003), 49-53

[8] (Helmut) Albrecht[40], *Warum Elefanten dicke Beine haben – Mathematik zum Schmunzeln und Staunen [Tial elefantoj havas dikajn gambojn – matematiko por subrideti kaj miregi]*, Books on Demand [Libroj por bezono], Norderstedt, 1-a eldono, (2009)

[26] germana: sinjoro [(R.) Rote]
[27] [germana: sinjoro (Eriĥ) Vorbz]
[28] germana: [(V.) Gelert]
[29] germana: [(H.) Kistna]
[30] germana: [(M.) Helviĥ]
[31] germana: [(H.) Kestna]
[32] germana: [(H.) Rajĥart]
[33] rusa: [(I. N.) Bronstajn]
[34] rusa: [(K. A.) Zemendjajef]
[35] germana: [(G.) Groŝe]
[36] germana: [(V.) Cigla]
[37] germana: [(D.) Cigla]
[38] germana: sinjoro [(Kurt) Havliĉek]
[39] germana: sinjoro [(Hans-Volfgang) Hen]
[40] germana: sinjoro [(Helmut) Albreĥt]