Wieviele Töne hat die Tonleiter?

Norbert Südland*
Otto–Schott–Straße 16
D–73431 Aalen /Württemberg

1988–2009

Zusammenfassung

In der Musik–Theorie werden immer wieder sehr viele Dinge als unabänderlich hingenommen, ohne dass man sich genauere Gedanken über deren inhaltliche Begründbarkeit gemacht hätte. Beispiele dieser Grund–Annahmen sind eine Tonleiter mit 7 Tönen oder der Quintenzirkel mit 12 Elementen. Dass diese Ansätze keinesfalls zwingend sind, lässt sich mit etwas Rechen–Aufwand und dem nötigen physikalischen Verständnis zeigen.

1 Begriffe

Aus den physikalischen Überlegungen zur Signal–Schärfe ergeben sich folgende Definitionen:

- *Ton*: Ein Ton ist ein Geräusch, dessen Schwingungs–Frequenz feststellbar ist.
- *Harmonie*: Ausgehend von der Diskussion des harmonischen Oszillators werden ganzzahlige Schwingungszahl–Verhältnisse wegen ihrer Signal–Schärfe als Harmonie bezeichnet.
- *Konsonanz*:
  - Ist das Schwingungszahl–Verhältnis ganzzahlig, so verschmelzen die Töne zu einem einzigen Ton mit charakteristischer Klangfarbe. Diesen Effekt der *vollkommenen Konsonanz* macht man sich auch beim Bau von Orgelregistern zu Nutze.
  - Ist das Schwingungszahl–Verhältnis *in etwa* ganzzahlig, so ergibt sich eine Schwebung um das arithmetische Mittel der Frequenzen. Dadurch lassen sich noch verschiedene Töne heraus hören. Dieser Effekt ist für mehrstimmige Musik besonders interessant.
- *Dissonanz*: Die Schwebungs–Frequenz ist so groß, dass sie das Erkennen der Grund–Frequenz stört. Das Gehirn ist mit der Zuordnung der Frequenzen überlastet.

Die hier gegebenen Begriffe orientieren sich am subjektiven Eindruck und stehen außerdem in einem physikalischen Zusammenhang, auf dem die Funktionsweise elektronischer Stimmgeräte aufbaut.

Wichtig ist vor allem die Einsicht, dass harmonische Musik mit Konsonanzen zu tun hat, die je nach zu Grunde liegender Theorie verschieden ausgeführt sein können.

*E–Mail: Norbert.Suedland@t-online.de, Internet: http://www.Norbert-Suedland.de

2 Konsequenzen aus dem Weber–Fechnerschen Gesetz

Nach Weber und Fechner reagieren Nerven logarithmisch auf Reize, so dass eine Signal–Verdopplung stets als gleiche Steigerung empfunden wird. In der Musik wird eine Frequenz–Verdopplung ebenfalls stets als gleiches Intervall empfunden. Die Frequenz–Verdopplung (Schwingungszahl–Verhältnis 2:1) heißt in der europäischen Musik–Tradition *Oktave*. Eine gleichmäßige Unterteilung der Oktave muss sich wegen des Weber–Fechnerschen Gesetzes an gleichen Frequenz–Verhältnissen und nicht an gleichen Frequenz–Differenzen orientieren.

Die mathematische Ausdrucksweise wird durch den Logarithmus des zugehörigen Frequenz–Verhältnisses gegeben, wobei in der europäischen Musik–Tradition mittlerweile die Einheit *Cent* eingeführt wurde, um Intervall–Abstände objektiv zu bestimmen:

$$1\,\text{Cent} := 2^{\frac{1}{1200}} \tag{1}$$

100 Cent werden wie folgt berechnet:

$$100\,\text{Cent} = (1\,\text{Cent})^{100} = 2^{\frac{1}{12}} \tag{2}$$

Dies ist gerade ein europäischer Halbton in der gleichschwebenden Intonation. Eine Oktave hat somit 1200 Cent. Ein gegebenes Frequenz–Verhältnis $\frac{f_2}{f_1}$ wird wie folgt in Cent umgerechnet:

$$1200\,\frac{\log\left(\frac{f_2}{f_1}\right)}{\log(2)}\,\text{Cent} \tag{3}$$

Da alle Logarithmen zueinander proportional sind, kommt es in der Rechen–Regel (3) nur darauf an, dass jeweils derselbe Logarithmus im Zähler wie im Nenner verwendet wird.

Im Allgemeinen sagt ein „glatter" Cent–Wert gar nichts über die Konsonanz eines Intervalls aus. Diese Einheit wird hier trotzdem verwendet, da sie verbreitet ist.

3 Harmonische Klänge

Bei der Suche nach *Konsonanz* spielen die ganzzahligen Schwingungszahl–Verhältnisse die wesentliche Rolle. So ergibt sich für die Intervalle, aus denen ein harmonischer Zweiklang aufgebaut ist:

$$\frac{4}{3}\,\frac{3}{2} = \frac{2}{1} = \frac{3}{2}\,\frac{4}{3} \tag{4}$$

Für einen Dreiklang ergibt sich:

$$\frac{6}{5}\,\frac{5}{4}\,\frac{4}{3} = \frac{2}{1} = \frac{4}{3}\,\frac{5}{4}\,\frac{6}{5} \tag{5}$$

Für einen Vierklang ergibt sich:

$$\frac{8}{7}\,\frac{7}{6}\,\frac{6}{5}\,\frac{5}{4} = \frac{2}{1} = \frac{5}{4}\,\frac{6}{5}\,\frac{7}{6}\,\frac{8}{7} \tag{6}$$

Für einen Fünfklang folgt analog:

$$\frac{10}{9}\,\frac{9}{8}\,\frac{8}{7}\,\frac{7}{6}\,\frac{6}{5} = \frac{2}{1} = \frac{6}{5}\,\frac{7}{6}\,\frac{8}{7}\,\frac{9}{8}\,\frac{10}{9} \tag{7}$$

Die Vertauschungs-Möglichkeiten sind für die Vier- und Fünfklänge weitaus größer als hier angegeben. Eine Unterscheidung in Dur und moll ergibt sich jedenfalls durch Spiegel–Symmetrie auch schon beim Dreiklang.

4 Tonsystem für Kinder

Soll alles, was ein Kind auf einem Musik–Instrument anrichtet, harmonisch klingen, so ist dieses in einem reinen Fünfklang[1] zu stimmen, und dann kann nur harmonische Musik resultieren, wenn gespielt wird. Ein bekanntes Musikstück der Fünfton–Musik ist der ,,Floh–Walzer", der auf einem Klavier nur auf den schwarzen Tasten gespielt wird.

Wird das Musik–Instrument durch einen Computer gestimmt, so kann bei Bedarf von ,,Erwachsenen"–Stimmung auf ,,Kinder"–Stimmung umgeschaltet werden, was immer noch genug Variations–Möglichkeiten ergibt: Fünfton–Instrumente können auf unterschiedliche Weise[2] harmonisch rein gestimmt werden.

5 Gleichschwebende Tonleiter–Intervalle

Um nicht für jede Tonart einen eigenen Klang–Charakter zu bekommen, erscheint es sinnvoll, die Abstände zwischen je zwei benachbarten Tönen konstant zu wählen. Dadurch kann z.B. ein Lied etwas höher oder tiefer angestimmt werden, ohne dass die Instrumente umgestimmt[3] werden müssen.

Die Bezeichnung *gleichschwebende Stimmung* rührt daher, dass zum Stimmen Quinten und Quarten als die reinsten Intervalle verwendet werden, um alle Töne daraus zu erzeugen. Da keine reinen Intervalle[4] verwendet werden, besitzen die Quinten und Quarten jeweils eine kleine Schwebung[5]. Geiger stimmen ihr Instrument meist in reinen Quinten, was bei der Komposition beachtet werden sollte.

Die mathematische Beschreibung der gleichschwebenden Stimmung lautet:

$$\text{Kammerton} \times 2^{\frac{n}{t}} \quad t \in \{2, 3, \ldots, \} \quad n \in \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\} \tag{8}$$

Die eigentliche Frage, wieviele Töne t die Tonleiter hat, ist dadurch aber überhaupt nicht geklärt. Diese Frage lässt sich nach einer längeren Rechnung beantworten, indem ein Kompromiss aus konsonanten Intervallen bei gleichschwebender Stimmung gesucht wird.

Es sei darauf hingewiesen, dass J. S. Bach zu seinem *,,Wohltemperierten Clavier"* auch eine zugehörige *Wohltemperierte Stimmung*[6] angab, die von der gleichschwebenden Stimmung leicht abweicht. Dies belegt, dass er mit der Vorläufigkeit seiner Ton–Systeme umzugehen verstand.

Um bei den entstehenden Intervallen die Güte des Klangs beurteilen zu können, wird der Abstand in Cent zu einem benachbarten Konsonanz–Intervall errechnet:

$$\Delta := 1200 \left(\frac{n}{t} - \frac{\log\left(\frac{f_2}{f_1}\right)}{\log(2)} \right) \text{Cent} \tag{9}$$

Die Auswertung der Rechnung führt auf bevorzugte Teilungen t der Oktave, wenn die Grund–Intervalle möglichst gut getroffen werden.

[1] Durch Vertauschung der Intervalle sind $5 \times 4! = 5 \times 24$ verschiedene Möglichkeiten dafür vorhanden!
[2] nämlich in 24 verschiedenen Tongeschlechtern, die jeweils 5 Umkehrungen besitzen!
[3] Dazu müssen die Spieler allerdings umdenken, nämlich ,,transponieren", können.
[4] außer der Oktave
[5] in Europa etwa 2 Schwebungen pro Sekunde
[6] vgl. [Bil1989], Seite 30f

6 Ergebnisse

Es resultieren brauchbare Ergebnisse für $t \in \{5, 7, 12, 22, 41, \ldots\}$. Bis auf die letztgenannte Möglichkeit sind alle Teilungen historisch verwirklicht – ohne deshalb auch gleichschwebend sein zu müssen.

6.1 Die gleichschwebende 5–Teilung

Die Intervall–Differenzen Δ sind so groß, dass die harmonischen Varianten (7) konkurrieren:

n	$2^{n/5}$	$f_2 : f_1$	$\frac{\Delta}{[\text{Cent}]}$
0	1.0000	1 : 1	0.0000
1	1.1487	8 : 7	8.8259
2	1.3195	4 : 3	−18.0450
3	1.5157	3 : 2	18.0450
4	1.7411	7 : 4	−8.8259
5	2.0000	2 : 1	0.0000

Rein gestimmt ergeben sich folgende symmetrische Intervall–Folgen für einen Fünfklang, die weder Dur noch moll sind:

$$\frac{8}{7}\frac{7}{6}\frac{9}{8}\frac{7}{6}\frac{8}{7} = \frac{2}{1} = \frac{7}{6}\frac{8}{7}\frac{9}{8}\frac{8}{7}\frac{7}{6} \tag{10}$$

6.2 Die gleichschwebende 7–Teilung

Die Intervall–Differenzen Δ sind so groß, dass historisch eine diatonische Tonleiter mit asymmetrischer Teilung resultierte:

n	$2^{n/7}$	$f_2{:}f_1$	$\frac{\Delta}{[\text{Cent}]}$
0	1.0000	1:1	0.0000
1	1.1041	11:10	6.4243
2	1.2190	6:5	27.2159
3	1.3459	4:3	16.2407
4	1.4860	3:2	−16.2407
5	1.6407	5:3	−27.2159
6	1.8114	9:5	10.9751
7	2.0000	2:1	0.0000

Für $n = 1$ und $n = 6$ sind die Dissonanzen so groß, dass auch rein rechnerisch eine eindeutige Intervall–Zuordnung schwer fällt.

Ein rein gestimmter symmetrischer 7–Klang sieht etwa so aus und belegt, dass auch zu den diatonischen[7] Tonleitern Alternativen möglich sind:

$$\frac{11}{10}\frac{12}{11}\frac{10}{9}\frac{9}{8}\frac{10}{9}\frac{12}{11}\frac{11}{10} = \frac{2}{1} = \frac{12}{11}\frac{11}{10}\frac{10}{9}\frac{9}{8}\frac{10}{9}\frac{11}{10}\frac{12}{11} \tag{11}$$

[7] Bestehend aus 5 Ganzton– und 2 Halbton–Schritten der 12–geteilten Oktave

6.3 Die gleichschwebende 12–Teilung

Bei dieser Teilung wurde die gleichschwebende Intonation erstmals historisch umgesetzt:

n	$2^{n/12}$	$f_2{:}f_1$	$\frac{\Delta}{[\mathrm{Cent}]}$
0	1.0000	1:1	0.0000
1	1.0595	18:17	1.0454
2	1.1225	9:8	−3.9100
3	1.1892	6:5	−15.6413
4	1.2599	5:4	13.6863
5	1.3348	4:3	1.9550
6	1.4142	7:5	17.4878
7	1.4983	3:2	−1.9550
8	1.5874	8:5	−13.6863
9	1.6818	5:3	15.6413
10	1.7818	16:9	3.9100
11	1.8877	17:9	−1.0454
12	2.0000	2:1	0.0000

6.4 Die gleichschwebende 22–Teilung

Diese Teilung ist historisch nicht–gleichschwebend aus Arabien oder Indien bekannt:

n	$2^{n/22}$	$f_2{:}f_1$	$\frac{\Delta}{[\mathrm{Cent}]}$	n	$2^{n/22}$	$f_2{:}f_1$	$\frac{\Delta}{[\mathrm{Cent}]}$
0	1.0000	1:1	0.0000	22	2.0000	2:1	0.0000
1	1.0320	32:31	−0.4190	21	1.9380	31:16	0.4190
2	1.0650	16:15	−2.6404	20	1.8779	15:8	2.6404
3	1.0991	11:10	−1.3679	19	1.8196	11:6	−12.9993
4	1.1343	8:7	−12.9923	18	1.7632	7:4	12.9923
5	1.1706	7:6	5.8564	17	1.7085	12:7	−5.8564
6	1.2081	6:5	11.6314	16	1.6555	5:3	−11.6314
7	1.2468	5:4	−4.4955	15	1.6042	8:5	4.4955
8	1.2867	9:7	1.2795	14	1.5544	14:9	−1.2795
9	1.3278	4:3	−7.1359	13	1.5062	3:2	7.1359
10	1.3704	11:8	−5.8634	12	1.4595	19:13	−2.4399
11	1.4142	7:5	17.4878	11	1.4142	7:5	17.4878

Diese Teilung besitzt bei gleichschwebender Stimmung verhältnismäßig schlecht gestimmte Quinten und Quarten, aber besonders für die Melodie–Führung viele Konsonanzen.

6.5 Die gleichschwebende 41–Teilung

Diese Teilung ist gleichschwebend *und* lässt harmonische Vierklänge (6) und eventuell auch Fünfklänge (10) zu. Sie wurde bislang noch nicht angewandt:

n	$2^{n/41}$	f_2:f_1	$\frac{\Delta}{[\text{Cent}]}$	n	$2^{n/41}$	f_2:f_1	$\frac{\Delta}{[\text{Cent}]}$
0	1.0000	1:1	0.0000	41	2.0000	2:1	0.0000
1	1.0170	60:59	0.1712	40	1.9665	59:30	−0.1712
2	1.0344	30:29	−0.1549	39	1.9335	29:15	0.1549
3	1.0520	20:19	−0.9958	38	1.9011	19:10	0.9958
4	1.0700	15:14	−2.3696	37	1.8692	15:8	−5.3419
5	1.0882	12:11	−4.2956	36	1.8379	11:6	4.2956
6	1.1068	10:9	−6.7940	35	1.8071	9:5	6.7940
7	1.1256	9:8	0.9680	34	1.7768	16:9	−0.9680
8	1.1448	8:7	2.9722	33	1.7470	7:4	−2.9722
9	1.1643	7:6	−3.4563	32	1.7177	12:7	3.4563
10	1.1842	13:11	3.4732	31	1.6889	17:10	−11.3246
11	1.2044	6:5	6.3099	30	1.6606	5:3	−6.3099
12	1.2249	11:9	3.8116	29	1.6328	18:11	−3.8116
13	1.2458	5:4	−5.8259	28	1.6054	8:5	5.8259
14	1.2670	19:15	0.5118	27	1.5785	11:7	7.7519
15	1.2886	9:7	3.9403	26	1.5520	14:9	−3.9403
16	1.3106	21:16	−2.4882	25	1.5260	29:19	−0.3569
17	1.3330	4:3	−0.4840	24	1.5004	3:2	0.4840
18	1.3557	19:14	−1.8578	23	1.4753	31:21	−1.0839
19	1.3788	11:8	4.7796	22	1.4505	16:11	−4.7796
20	1.4023	7:5	2.8537	21	1.4262	10:7	−2.8537

Diese Teilung besitzt neben phantastischen Konsonanzen auch Dissonanzen und lässt eine entsprechend reiche Musik erwarten. Sogar zwei verschiedene *Tritoni*[8] sind dabei, ebenso gibt es das Verhältnis 9:8 jetzt neben 8:7 für die *große Sekunde*.

Die errechneten Töne lassen sich auch schon mit einem QBASIC–Programm und dem Befehl SOUND zu Melodien zusammen fügen, während für die Mehrstimmigkeit ein größerer Programmier–Aufwand ansteht. Die Töne der 41–Teilung sind so weit voneinander entfernt, dass sich der Unterschied von 29.2683 Cent zweier benachbarter Melodie–Töne noch gut heraus hören lässt. Bei einer 200–Teilung mit 6 Cent Intervall–Breite ist dies kaum noch möglich.

Es bleibt fraglich, ob es einem Instrumental–Musiker zugemutet werden kann und soll, eine Unterscheidung von Siebtel–Tönen der 41–Teilung zu stimmen und zu spielen. Dazu muss noch ein Notenlinien–System entwickelt werden, das die angestrebte Klangfülle zu fassen vermag.

[8]Einzahl: *Tritonus*; steht für drei *Ganztöne* der 7–Teilung.

7 Was ist neu an der Untersuchung?

Die folgende Zusammenstellung ist nur ein Versuch, das besonders Ungewöhnliche an der Studie aufzulisten:

- Die Behauptung, Kunst sei etwas, das sich nicht objektiv beurteilen ließe, ist im Bereich Musik unzutreffend.
- Die Behauptung, in der Musik sei alles, was an harmonischer Musik möglich ist, schon komponiert worden, zeugt nicht von Sachkenntnis.
- Das *pythagoräische Komma* wird von der 12- und der 41–Teilung der Oktave bestmöglich erfüllt. Die Glorifizierung der Zahl 12 in der Musik ist dadurch relativiert.
- Die Bedeutung von indischer Musik (22–Teilung der Oktave) lässt sich gerade für vielstimmige Musik zeigen. Gleichzeitig ist damit die Vorherrschaft der europäischen Musik zu Ende.
- Die 22–Teilung und erst recht die 41–Teilung der Oktave enthält die Vorzüge der *mitteltönigen* Stimmung, umgeht allerdings das Problem des *Orgelwolfs*[9].
- Mit vorhandenen Kompositionen lässt sich ausprobieren, inwieweit diese in die 41–Teilung der Oktave transponierbar sind.
- Es ist bemerkenswert, dass ausgerechnet J. S. Bach ein großer Liebhaber der Zahl 41 [Sme1950][10] war. Seine Kompositionen, die stets auf Vorläufigkeit der Intonation ausgelegt waren, dürften die Transposition auf die 41–geteilte Oktave am ehesten als klangliche Optimierung erfahren.
- Es besteht die Hoffnung, dass alle Tonsysteme der Erde mit der 41–Teilung zusammen gefasst werden können, so dass eine harmonische Mischung von europäischer und orientalischer Musik eventuell noch gelingt.
- Gelungene Musik–Theorie ist ein Kompromiss zwischen gutem Klang und Machbarkeit.

Diese theoretischen Betrachtungen müssen nun durch die Praxis bestätigt werden.

Literatur

[Bil1989] Billeter, Bernhard: *Anweisung zum Stimmen von Tasteninstrumenten*, Merseburger, 3. Auflage, (1989)

[Sme1950] Smend, Friedrich: *Johann Sebastian Bach bei seinem Namen gerufen*, Bärenreiter, (1950)

[9] Das Intervall As–Es ist bei der mitteltönigen Stimmung eine Quinte, die grausig heult – wie ein Wolf.

[10] Seite 29