Gravitations-Formel.nb

Fragesteller: 1986 – 2007 Norbert Südland
Bearbeitung: 23. 5.2007 Norbert Südland
Letzte Berechnung: 23. 5.2007 Norbert Südland

Eine Variante zu Newtons Gravitationsformel

Bastelkurs zur Erfindung neuer Formeln
Sternwarte Aalen, 2007

■ 1.1. Hinführung

■ 1.1.1. Das Anliegen der Physik

■ 1.1.1.1. In Worten

Die Physik ist der Versuch einer mathematischen Annäherung an den Normalfall der für den Menschen messbaren Realität.

■ 1.1.1.2. Was ist eine Formel?

Eine *Formel* ist eine Rechenvorschrift. Allgemeiner heißen Rechenvorschriften *Algorithmen* (nach Al Chorezmi, dem Araber, der sich mit der Kalenderkunst befasste). Rechenvorschriften für Computer heißen *Programme*.

Eine Formel ist also ein möglichst primitives Programm zur Beschreibung der Wirklichkeit.

■ 1.1.1.3. Wo kommen die physikalischen Formeln her?

Für den Physiker ist eine Formel das, was für den Bäcker der Teig ist: Er knetet darin so lange herum, bis das heraus kommt, was er gerne haben möchte.

Es gibt in der Bibel keine einzige göttliche Formel zur Physik, sondern lediglich Anweisungen zur Wahrhaftigkeit, zum Prüfen und zum Argumentieren, ferner Umrechnungsvorschriften zu physikalischen Einheiten. Auch im deutschen Bundestag werden keine physikalischen Gesetze verabschiedet.

■ 1.1.1.4. Wer darf eine physikalische Formel verändern?

Nach GG, Art. 5, Abs. 3 darf jeder an der Variation der Theorie mitwirken, insbesondere auch der so genannte Laie.

So wie ein Maler ein Gemälde nach seinem Geschmack einrichten kann und darf, so arbeitet auch der physikalische "Formelbäcker". Interessant wird diese Kunst vor allem dann, wenn der Betrachter darin etwas ihm Bekanntes erkennen kann.

Jede Beschreibung ist unvollständig. Dies gilt auch für alle physikalischen Formeln, Algorithmen und Computerprogramme.

■ 1.1.2. Die Schönheitsfehler der Gravitationstheorien

■ 1.1.2.1. Die Newtonsche Schwerkraft

• Isaac Newton hat die Schwerkraft weder erfunden noch bewirkt, er hat sie lediglich beschrieben.

Seine Formel lautet in der heutigen Vektor-Schreibweise:

$$\vec{F}[\vec{r}\,] = -\gamma \frac{m\,M}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \tag{1.1}$$

mit:

$\vec{F}$	Symbol der Kraft (engl.: force)
$\vec{r}$	Abstandsvektor zweier Körper (bevorzugt Kugeln)
r	Betrag des Abstandsvektors
γ	Gravitationskonstante
m, M	die schweren Massen zweier Körper

Newton leitete diese Formel aus den 3 Keplerschen Gesetzen ab, welche Kepler aus einer Fülle von gemessenen Daten zur Planetenbewegung fand.

Die 3 Keplerschen Gesetze lauten:

1. Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

2. Die großen Halbachsen der Planetenbahn überstreichen in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

3. Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen.

• Das zweite Keplersche Gesetz führt zu der Einsicht, dass die Gravitationskraft eine *Zentralkraft* ist, also nur parallel zum Abstandsvektor wirkt.

• Abweichungen von der Ellipsenbahn wurden inzwischen gemessen, wobei die Periheldrehung des Merkur am bekanntesten ist, ebenso der unerwartete Verlauf der Flugbahn des Kometen Hale-Bopp.

• Das Abstandsgesetz antiproportional zum Abstandsquadrat führt auf die Einsicht, dass homogene Hohl- oder Vollkugeln so betrachtet werden können, als sei die Gesamtmasse im Schwerpunkt vereinigt. Es gab auch schon Varianten zum Abstandsgesetz, die sich als Trugschluss heraus stellten, etwa eine erneute Auswertung der Eötvösschen Versuchsreihe, bei der dann der Auftrieb in der Luft übersehen worden war.

- Jede Variante der Theorie sollte nicht schlechter sein als das bislang verwendete Modell, das ja die Wirklichkeit bereits im Rahmen der Toleranz zutreffend beschreibt.

Der Schönheitsfehler aus Newtons Sicht: Die Trägheitskraft ist eine Nahkraft, die Schwerkraft wirkt, "als ob" zwischen beiden Massen eine Fernkraft wirke (vgl. [BS1945], § 31., Seite 113): Zu allen Zeiten scheint die andere Masse sofort zu wissen, wo sich der andere Körper befindet. Das kam Newton seltsam vor, er arbeitete aber keine Variante zu seiner Formel aus.

▪ 1.1.2.2. Die Einsteinsche Schwerkraft

Albert Einstein arbeitete viele Jahre an dieser Frage, gelangte jedoch zu keiner abschließenden Formel. Seine Theorie der Relativität von Ort und Zeit bestätigt jedenfalls die Periheldrehung des Merkur.

Nach Einstein ist die größte Geschwindigkeit, die erreicht werden kann, die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Seiner Theorie zufolge ist diese in allen unbeschleunigten Koordinatensystemen simultan identisch.

Der Schönheitsfehler der Einsteinschen Theorie ist der, dass weiterhin nach Orts- und Zeitkoordinaten differenziert wird, obwohl diese im Rahmen der Dynamik eine veränderte Metrik aufweisen. Newton hat eine derartige Schwäche in seinem Modell vermieden, denn zu seinen Zeiten waren die Differenzialgleichungen noch sehr neu und unbekannt.

▪ 1.1.2.3. Die Kantsche Gravitation

Immanuel Kant machte aus der Newtonschen Gravitationstheorie eine Weltanschauung, aus der *zwingend* das Newtonsche Gravitationsgesetz folge. Die als einzig möglich dargestellte Betrachtung hat nicht nur Albert Einstein verwirrt und zur Suche nach Alternativen bewogen.

Vorgänger zu Kants Ansatz finden sich in der mittelalterlichen Scholastik, die Kant nun mit scholastischen Parolen bekämpfte.

▪ 1.1.2.4. Das Wesen der Fernkraft

Die Fernkraft wird am besten dadurch verstanden, dass wir ihre Ausbreitungsgeschwindigkeit als unendlich schnell annehmen. Ein anschaulicher Mechanismus zur Kraftübertragung ist das nicht, aber er beschreibt realistisch, was die Formel von Newton tatsächlich aussagt: "Die Schwerkraft breitet sich immer unendlich schnell aus."

Diese Aussage steht in deutlichem Widerspruch zur speziellen Relativitätstheorie von Einstein. Es war also nur folgerichtig, dass dieser an einer Gravitationstheorie arbeitete.

▪ 1.1.2.5. Mathematischer Ansatz

Allgemein hängen Differenzialgleichungen zur Kraft in der Mathematik von Ort, Geschwindigkeit und Zeit ab. Die Newtonsche Gravitationskraft hängt dagegen nur vom Abstand ab, ist also ein Spezialfall, der freilich konsistent erweitert werden kann.

Die Dynamik der *geschwindigkeitsabhängigen Kräfte* ist nach wie vor nur wenig ausgebaut worden. Sie stellt einen Verzicht auf die Potenzialtheorie dar und zeigt, dass das d'Alembertsche Prinzip nicht alle Fälle der Dynamik auf eine statische Betrachtung reduzieren kann.

■ 1.2. Geschwindigkeitsabhängige Kräfte

■ 1.2.1. Strömungsmodell am Fluss

■ 1.2.1.1. Statische Kraftmessung

Wird an einem gleichmäßig fließenden Fluss ein Boot eingetaucht, so lässt sich statisch auf der gesamten Beschleunigungsstrecke eine konstante Reibungskraft ***F*** messen.

■ 1.2.1.2. Kurzschluss

Daraus folgt nun für manche Leute "zwingend" und sofort in einer Logik, die ich gerne als "Kurzschluss" bezeichne:

Gleichung[1] = *m r*''[*t*] == *F*

$m\, r''[t] == F$

Das Anfangswertproblem sei der Start aus der Ruhe heraus:

AWP = Sequence[*r*'[0] == 0, *r*[0] == 0]

Sequence[r'[0] == 0, r[0] == 0]

Diese Gleichung führt nach bekannten Verfahren der Mathematik auf eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung:

Lösung[1] = {*r* → Function @@ {*t*, *r*[*t*] /. Flatten[DSolve[{Gleichung[1], AWP}, *r*[*t*], *t*]]}}

$\left\{r \to \text{Function}\left[t,\ \frac{F\, t^2}{2\, m}\right]\right\}$

Die Probe ergibt:

Probe[1] = Gleichung[1] /. Lösung[1]

True

Und schon ist die Theorie eines *perpertuum mobile* fertig, nach der das auf dem Fluss beschleunigte Boot irgendwann den Fluss überholt und sicher auch zur Energiegewinnung beitragen kann.

Der Physiker fragt angesichts solcher Ergebnisse aus leidvoller Erfahrung: Wo liegt nun der Fehler?

■ 1.2.1.3. Abhängigkeit von der Strömungsgeschwindigkeit

In einem weiteren Experiment kann festgestellt werden, dass der Strömungswiderstand im einfachsten Fall proportional zur Strömungsgeschwindigkeit an der Wasseroberfläche ist.

Somit bedarf die Formel einer Ergänzung:

$$F \to \left(1 - \frac{v}{c}\right) F \tag{1.2}$$

Allgemeiner wird mit einem Faktor multipliziert, der für $v \to 0$ gleich Eins ist und für $v \to c$ gleich Null wird.

Es handelt sich um ein besonders primitives Modell zu dem, was John Nash als *regulierende Dynamik* bezeichnete.

Die zugehörige Differenzialgleichung ist analytisch lösbar:

$$\textbf{Gleichung[2]} = m\, r''[t] == F \left(1 - \frac{r'[t]}{c}\right)$$

```
Lösung[2] = {r → Function @@ {t, r[t] /. Flatten[DSolve[{Gleichung[2], AWP}, r[t], t]]}}
Probe[2] = Gleichung[2] /. Lösung[2]
% // ExpandAll
```

$$m\, r''[t] == F \left(1 - \frac{r'[t]}{c}\right)$$

$$\left\{r \to \text{Function}\left[t, -\frac{c^2 m}{F} + \frac{c^2 E^{-\frac{F t}{c m}} m}{F} + c\, t\right]\right\}$$

$$E^{-\frac{F t}{c m}} F == \left(1 - \frac{c - c\, E^{-\frac{F t}{c m}}}{c}\right) F$$

True

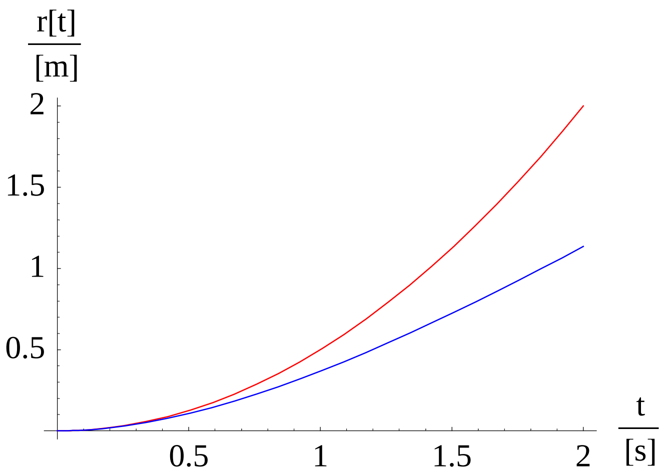
■ 1.2.1.4. Schaubilder

Der grafische Vergleich ergibt für die Bahnkurve

$DefaultFont = {"Times", 12.};
$r[t]$ /. {Lösung[1], Lösung[2]} /. {$F \to 1$, $c \to 1$, $m \to 1$}
Schaubild[r, 1, 2] =

Plot[Evaluate[%], {t, 0, 2}, PlotStyle → {Hue[0], Hue[$\frac{2}{3}$]}, AxesLabel → {"$\frac{t}{[s]}$", "$\frac{r[t]}{[m]}$"}];

$\left\{\frac{t^2}{2}, -1 + E^{-t} + t\right\}$

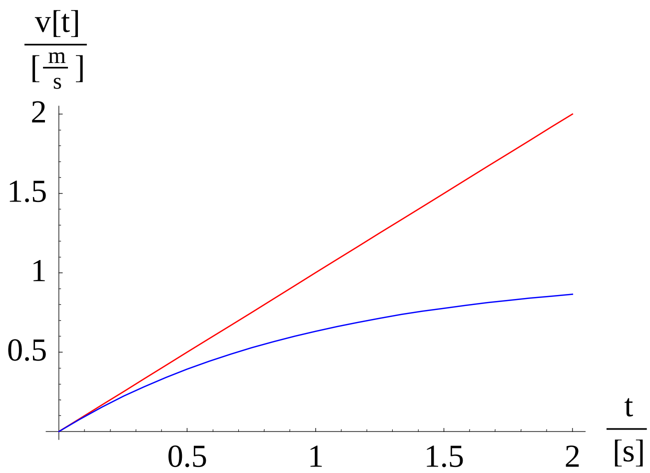


und die Geschwindigkeiten:

$r'[t]$ /. {Lösung[1], Lösung[2]} /. {$F \to 1$, $c \to 1$, $m \to 1$}
Schaubild[v, 1, 2] =

Plot[Evaluate[%], {t, 0, 2}, PlotStyle → {Hue[0], Hue[$\frac{2}{3}$]}, AxesLabel → {"$\frac{t}{[s]}$", "$\frac{v[t]}{[\frac{m}{s}]}$"}];

$\{t, 1 - E^{-t}\}$



Das erweiterte Modell kann nun sogar ein Abbremsen des Körpers beschreiben, wenn dieser schneller als die Grenzgeschwindigkeit c beginnt.

1.2.2. Strömungsmodell zur Gravitation

1.2.2.1. Meine aktuelle Formel

Das folgende Strömungsmodell zur Gravitation kann nach Bedarf modifiert werden. Es dient vor allem der Lehre zur Veranschaulichung der Effekte:

$$\vec{F}[\vec{r}, \vec{v}] = -\gamma \frac{m M}{r^2} \left(1 + \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c r}\right) \frac{\vec{r}}{r} \tag{1.3}$$

- Die nun modifizierte Gravitationsformel lässt alle statischen Betrachtungen zur Newtonschen Formel völlig unverändert. Insbesondere das Abstandsgesetz bleibt erhalten.

- Das Wesen der Zentralkraft bleibt auch für die geschindigkeitsabhängige Komponente erhalten. Es gilt $\vec{v} = \vec{r}\,'$.

- Da die radiale Geschwindigkeit $\vec{v}$ für alle Planetenbahnen bei genügend großem und noch unbekanntem c vernachlässigbar ist, resultieren die Keplerschen Gesetze wie bei Newton.

- Hier wurde in der Klammer das Vorzeichen $+$ gewählt, damit ein enteilender Körper stärker als erwartet zurück geholt wird. Dies korrespondiert mit dem gemessenen Phänomen, dass die Voyager-Sonden langsamer aus dem Planetensystem enteilen als errechnet. Die quantitative Diskussion hierzu steht noch aus.

- Kommt der Körper dagegen der Sonne zu nah, so wird bei hohen Perihelgeschwindigkeiten die Schwerkraft abgeschwächt, und es entsteht eine *Rosettenbahn* anstelle einer Keplerschen Ellipse, die wie bei der Flugbahn des Hale-Bopp die Diskussion begründet, ob dieser Komet jemals zurück kehren wird. Die quantitative Diskussion hierzu steht noch aus.

1.2.2.2. Verständnishürden

Dieses Strömungsmodell arbeitet anschaulich so, als würde ein Gravitations-Staubsauger ständig alle Massen zu jeder anderen Masse hin anziehen. Dies sprengt allemal die Vorstellungskraft eines Menschen. Der Physiker fragt mehr nach dem Wie als nach dem Warum. Gelingt die korrekte Beschreibung des Wie, so werden Verständnishürden gerne in Kauf genommen. Der Maßstab ist nicht die menschliche Vorstellungskraft, sondern die messtechnische Bestätigung.

- Der Newtonsche Grundsatz **actio = reactio** wird dahingehend modifiziert, dass die Frage, nach welcher Zeit dies geschehe, mit einer *Reaktionszeit* $t_R > 0$ beantwortet wird. Besonders delikat wird die Frage, ob die Gravitationswechselwirkung relativ zum bewegten Körper oder wie bei der Einsteinschen Lichtgeschwindigkeit in einem unabhängigen System ausgebreitet wird.

1.2.2.3. Interessanter Spezialfall

Der Einfluss der Schwerkraft auf die Resonanzfrequenz von Uhren aller Art ist nur dann nicht vorhanden, wenn die Schwerkraft unabhängig von der Geschwindigkeit ist:

Im Aufenthaltsbereich der Uhr sei die Gravitationskraft als konstant anzusetzen, eben vom Ortsfaktor $\vec{g}$ abhängig.

Dann bleibt für den harmonischen Oszillator im Schwerefeld der Erde folgende Gleichung übrig:

$$\text{Gleichung[3]} = r''[t] + \frac{D}{m}\, r[t] == -g\left(1 + \frac{r'[t]}{c}\right) \text{ // ExpandAll}$$

$$\frac{D\, r[t]}{m} + r''[t] == -g - \frac{g\, r'[t]}{c}$$

Die übliche Darstellung dieser Gleichung ergibt eine gedämpfte Schwingungsgleichung mit konstanter Inhomogenität:

$$\text{Gleichung[3, 1]} = \# + \frac{g}{c}\, r'[t]\ \&\ /@\ \text{Gleichung[3]}$$

$$\frac{D\, r[t]}{m} + \frac{g\, r'[t]}{c} + r''[t] == -g$$

Die Lösung ergibt für das oben diskutierte Anfangswertproblem:

$$\text{Lösung[3]} = \{r \to \text{Function} @@ \{t, r[t] /. \text{Flatten[DSolve[\{Gleichung[3, 1], AWP\}}, r[t], t]]\}\}$$

$$\left\{r \to \text{Function}\left[t, \frac{1}{D}\left(-g\, m + \frac{1}{2} E^{\frac{\left(-g\, m - \sqrt{-4 c^2 D m + g^2 m^2}\right) t}{2 c m}} g\, m \left(1 - \frac{g\, m}{\sqrt{m\,(-4\, c^2\, D + g^2\, m)}}\right) + \frac{1}{2} E^{\frac{\left(-g\, m + \sqrt{-4 c^2 D m + g^2 m^2}\right) t}{2 c m}} g\, m \left(1 + \frac{g\, m}{\sqrt{m\,(-4\, c^2\, D + g^2\, m)}}\right)\right)\right]\right\}$$

Die Probe ergibt:

Probe[3] = Gleichung[3] /. Lösung[3] // ExpandAll

True

Für $4\, c^2\, D > g^2\, m$ ergibt sich eine gedämpfte harmonische Schwingung mit verschobenem Nullpunkt, wobei nun die tatsächliche Resonanzfrequenz

$$\text{Resonanzfrequenz[3]} = \left\{\omega \to \sqrt{4\, c^2\, D\, m - g^2\, m^2}\right\}$$

$$\left\{\omega \to \sqrt{4\, c^2\, D\, m - g^2\, m^2}\right\}$$

durch den Ortsfaktor wie folgt beeinflusst wird:

Werden zwei baugleiche Uhren in der Stadt Aalen und auf dem Aalbäumle stationiert, so läuft wegen verringertem Ortsfaktor g die Uhr auf dem Aalbäumle mit leicht erhöhter Taktfrequenz. Wird nun die Zeit als von der Uhr abhängend definiert, so vergeht dieselbe auf dem Aalbäumle etwas "schneller".

Diese Aussage scheint im Widerspruch zur speziellen Relativitätstheorie nach Einstein zu stehen, wonach die Zeit in einem relativ bewegten System langsamer vergeht (vgl. [HMS2004], Abschnitt 10.1, Seite 701).

In Wirklichkeit ist jedoch ein ganz anderer Effekt beschrieben: Nach der hier vorgestellten Theorie kann der *Uhreneffekt* tatsächlich mit Relativgeschwindigkeit Null am Südpol gemessen werden, indem zwei baugleiche Uhren bei gleicher Temperatur etc. in verschiedenen Höhen übereinander angebracht werden. Die Geschwindigkeitskomponente der Erddrehung scheidet am Südpol aus.

Es war leider noch nicht möglich, konkrete Messergebnisse zum Uhreneffekt zu ermitteln, um wenigstens das Vorzeichen der nun auch "klassisch" – Newton lebte zur Zeit des Barock – deutbaren *Zeitdilatation* zu ermitteln. Die quantitative Diskussion steht noch aus.

■ 1.2.3. Weitere geschwindigkeitsabhängige Modelle

■ 1.2.3.1. Modifizierte Coulombkraft

Das folgende Strömungsmodell zur Coulombkraft kann nach Bedarf modifiert werden. Es dient vor allem der Lehre zur Veranschaulichung der Effekte:

$$\vec{F}[\vec{r}] = € \frac{q\,Q}{r^2}\left(1 - \frac{\vec{v}.\vec{r}}{c\,r}\right)\frac{\vec{r}}{r} \tag{1.4}$$

- Die Konstante **€** (sprich: "Epsilon quer") ist ein Makro, das in den verschiedenen historisch vorgekommenen Einheitensystemen der Physik entsprechend konkret ausgeführt wird. Diese Konstante ist zweifelsfrei ein Analogon zur Gravitationskonstante.

- Das Vorzeichen **–** vor ***v*** korrespondiert mit der Tatsache, dass nun ein **+** vor **€** steht. Damit unterscheiden sich Gravitationskraft und Coulombkraft nun endlich auch inhaltlich voneinander – zumindest in dieser Theorie. Dieser Unterschied wird nötig, damit beim Linear-Beschleuniger eine Grenzgeschwindigkeit ***c*** (hier eindeutig die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit!) resultiert:

$$\textbf{Gleichung[4]} = \boldsymbol{m\,r''[t] == € \frac{q\,Q}{r[t]^2}\left(1 - \frac{r'[t]}{c}\right)}$$

$$m\,r''[t] == \frac{€\,q\,Q\left(1 - \frac{r'[t]}{c}\right)}{r[t]^2}$$

Diese Gleichung ist zumindest noch so lösbar, dass auf eine numerische Lösung der Differenzialgleichung verzichtet werden kann:

DSolve[{Gleichung[4], *r*[0] == 1, *r*'[0] == 0}, *r*[*t*], *t*]

InverseFunction::ifun :
Warning: Inverse functions are being used. Values may be lost for multivalued inverses.

Solve::ifun : Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found.

Solve::tdep : The equations appear to involve
transcendental functions of the variables in an essentially non−algebraic way.

DSolve::dsing : Unable to fit initial/boundary conditions {*r*[0] == 1, *r*′[0] == 0}

$$\left\{\text{Solve}\left[-t+\int_{C[2]}^{r[t]} \frac{1}{c + c\,\text{ProductLog}\left[\frac{E^{-1+\frac{€ q Q + K\$88\, C[1]}{c^2\, K\$88\, m}}}{c}\right]}\, dK\$88 == t,\ r[t]\right],\ \{r[0] == 1,\ r'[0] == 0\}\right\}$$

? ProductLog

ProductLog[z] gives the principal solution for w in z = w e^w. ProductLog[k, z] gives the kth solution.

Die Proberechnung zu einer derartigen Lösung versagt mit *Mathematica*.

Es wird deshalb ein homogenes Beschleunigungsfeld **EFeld** angesetzt, und es ergibt sich eine lineare Differenzialgleichung:

$$\textbf{Gleichung[5] = Gleichung[4] /. }\left\{r[t] \to \frac{\sqrt{€ Q}}{\sqrt{\text{EFeld}}}\right\}$$

$$m\, r''[t] == \text{EFeld}\, q \left(1 - \frac{r'[t]}{c}\right)$$

Die Lösung ergibt:

Lösung[5] = {*r* → Function @@ {*t*, *r*[*t*] /. Flatten[DSolve[{Gleichung[5], AWP}, *r*[*t*], *t*]]}}

$$\left\{r \to \text{Function}\left[t,\ -\frac{c^2\, m}{\text{EFeld}\, q} + \frac{c^2\, E^{-\frac{\text{EFeld}\, q\, t}{c\, m}}\, m}{\text{EFeld}\, q} + c\, t\right]\right\}$$

Die Probe ergibt:

Probe[5] = Gleichung[5] /. Lösung[5]
% // ExpandAll

$$E^{-\frac{\text{EFeld}\, q\, t}{c\, m}}\, \text{EFeld}\, q == \left(1 - \frac{c - c\, E^{-\frac{\text{EFeld}\, q\, t}{c\, m}}}{c}\right) \text{EFeld}\, q$$

True

Die Grenzgeschwindigkeit ***c*** wird wie folgt erreicht:

Geschwindigkeit[5] = *r* '[*t*] /. Lösung[5]

$c - c\,E^{-\frac{\text{EFeld}\,q\,t}{c\,m}}$

Somit ist auch diese Dynamik konsistent zum experimentellen Befund formuliert.

■ 1.2.3.2. Einsteinsche Relativistik im klassischen Bild

Wird die aus der speziellen Relativitätstheorie resultierende Gleichung im Newtonschen oder gar klassischen Sinne interpretiert, so ergibt sich eine *geschwindigkeitsabhängige Kraft*:

$$\vec{F}[\vec{r},\,\vec{v}] == €\,\frac{q\,Q}{r^2}\left(\sqrt{1-\frac{\vec{v}.\vec{v}}{c^2}}\right)^{(3)}\frac{\vec{r}}{r} \tag{1.5}$$

Die eingeklammerte Potenz Drei besagt, dass die platte Interpretation als geschwindigkeitsabhängige Kraft ungeeignet ist, da dadurch eine harmonische Schwingung resultieren würde:

$$\textbf{Gleichung[6]} = m\,v'[t] == €\,\frac{q\,Q}{r[t]^2}\,\frac{\sqrt{c^2 - v[t]^2}}{c}\;/.\;\left\{r[t] \to \frac{\sqrt{€\,Q}}{\sqrt{\text{EFeld}}}\right\}$$

Last[DSolve[{Gleichung[6], *v*[0] == 0}, *v*[*t*], *t*]] // Simplify // PowerExpand
Lösung[6] = {*v* → Function @@ {*t*, *v*[*t*] /. %}}
Probe[6] = Gleichung[6] /. Lösung[6] // Simplify // PowerExpand

$$m\,v'[t] == \frac{\text{EFeld}\,q\,\sqrt{c^2 - v[t]^2}}{c}$$

Solve::verif : Potential solution {C[1] → Indeterminate} (possibly discarded by verifier) should be checked by hand. May require use of limits.

Solve::ifun : Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found.

Solve::verif : Potential solution {C[1] → Indeterminate} (possibly discarded by verifier) should be checked by hand. May require use of limits.

Solve::ifun : Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found.

$$\left\{v[t] \to c\,\text{Sin}\left[\frac{\text{EFeld}\,q\,t}{c\,m}\right]\right\}$$

$$\left\{v \to \text{Function}\left[t,\,c\,\text{Sin}\left[\frac{\text{EFeld}\,q\,t}{c\,m}\right]\right]\right\}$$

True

Albert Einstein griff als geübter Formelbäcker in die Trickkiste und gestaltete den Formalismus so, dass für die Dynamik die zeitliche Differenziation des relativistischen Impulses nötig wurde, und fertig war die gewünschte dritte Potenz des Wurzelausdrucks:

$$\textbf{Gleichung[7]} = m\, v'[t] == € \frac{q\,Q}{r[t]^2} \frac{\left(\sqrt{c^2 - v[t]^2}\right)^3}{c^3} \;/.\; \left\{r[t] \to \frac{\sqrt{€\,Q}}{\sqrt{\text{EFeld}}}\right\}$$

Last[DSolve[{Gleichung[7], *v*[0] == 0}, *v*[*t*], *t*]] // Simplify // PowerExpand
Lösung[7] = {*v* → Function @@ {*t*, *v*[*t*] /. %}}
Probe[7] = Gleichung[7] /. Lösung[7] // Simplify // PowerExpand

$$m\, v'[t] == \frac{\text{EFeld}\, q\, (c^2 - v[t]^2)^{3/2}}{c^3}$$

$$\left\{v[t] \to \frac{c\, \text{EFeld}\, q\, t}{\sqrt{c^2\, m^2 + \text{EFeld}^2\, q^2\, t^2}}\right\}$$

$$\left\{v \to \text{Function}\left[t, \frac{c\, \text{EFeld}\, q\, t}{\sqrt{c^2\, m^2 + \text{EFeld}^2\, q^2\, t^2}}\right]\right\}$$

True

■ 1.2.3.3. Schaubilder zum Vergleich

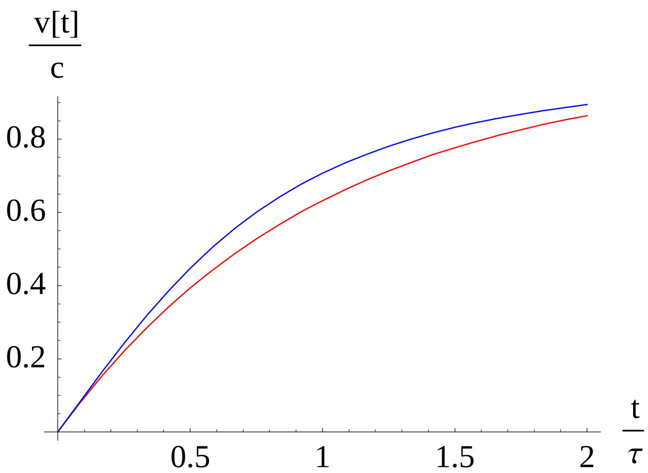
Der grafische Vergleich mit der Lösung der nun modifizierten Coulombkraft ergibt:

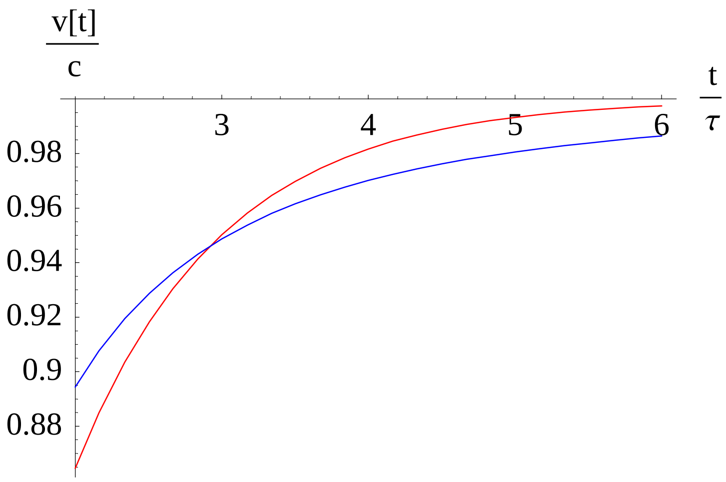
{Geschwindigkeit[5], *v*[*t*] /. Lösung[7]} /. {EFeld → 1, *c* → 1, *q* → 1, *m* → 1}
Schaubild[*v*, 5, 7, 1] =

$$\textbf{Plot}\left[\text{Evaluate}[\%], \{t, 0, 2\}, \text{PlotStyle} \to \left\{\text{Hue}[0], \text{Hue}\left[\frac{2}{3}\right]\right\}, \text{AxesLabel} \to \left\{"\frac{t}{\tau}", "\frac{v[t]}{c}"\right\}\right];$$

$$\textbf{Schaubild}[v, 5, 7, 2] = \text{Plot}\left[\text{Evaluate}[\%], \{t, 2, 6\}, \text{PlotStyle} \to \left\{\text{Hue}[0], \text{Hue}\left[\frac{2}{3}\right]\right\}, \text{AxesLabel} \to \left\{"\frac{t}{\tau}", "\frac{v[t]}{c}"\right\}\right];$$

$$\left\{1 - E^{-t}, \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}\right\}$$





Die *relativistischen Effekte* der Hochenergiephysik können also unterschiedlich diskutiert werden. Der bekannteste und älteste *Linearbeschleuniger* ist der Blitz, der Ionen annähernd auf Lichtgeschwindigkeit beschleunigt.

■ 1.2.4. Zusammenfassung

Das Anliegen der Relativistik nach Kopernikus, Galilei und Einstein ist die *Relativierung* bestehender dogmatischer Strukturen in der Lehre der Physik. Inzwischen gibt es auch dogmatische Vertreter der Einsteinschen Relativistik.

Jede Formel beschreibt die Wirklichkeit unvollständig, deshalb ist sie (die Formel) im Bedarfsfall zu modifizieren. Je nach Kultur und Schule des Formelbäckers folgen daraus unterschiedliche Varianten.

Es bleibt in jedem Stadium der physikalischen Forschung genügend Forschungsbedarf für nachfolgende Forscher-Generationen. Der Apostel Paulus beschreibt auch dieses Anliegen mit den Worten: *"Unser Wissen ist Stückwerk."* (aus 1. Korinther 13,9)

Zum Umgang mit soeben widerlegten (besser: relativierten) Formeln und Ansätzen mag ein Wort Jesu Christi hilfreich sein: *"Lasset beides miteinander wachsen bis zur Ernte."* (vgl. Matthäus 13,30)

Ein Techniker oder Mathematiker und selbst mancher Physiker kann nicht ahnen, ob die derzeit bearbeiteten Formalismen die Realität zutreffend abbilden. Es geht darum, die von anderen aufgestellten Differenzialgleichungen etc. zu lösen. Anhand der Lösung kann dann auch bisweilen der Sinn der Gleichung diskutiert werden. Außerdem können dann andere nachmessen, ob an dieser Variante etwas Brauchbares zu finden ist oder nicht.

Nach Einstein ([EI1957]) ist derjenigen Theorie der Vorzug zu geben, die ein gemessenes Phänomen zutreffend und einfacher beschreibt als eine andere Theorie. Hin und wieder gibt es auch eine Diskrepanz mehrerer Theorievarianten, zu deren Aufklärung noch nicht die zugehörigen Versuche erdacht oder durchgeführt worden sind.

Die Kunst der Widerlegung bzw. Relativierung sollte ähnlich wie ein echtes Schachspiel verstanden werden: Es geht nicht um Gewinnen oder Verlieren, nicht um Leben oder Tod, sondern um Beachtung der Regeln und das Durchhalten von Hängepartien. Auch ein Partner, der technisch matt gesetzt wurde, sollte noch ein Remis angeboten bekommen. Ein Aufruf zum Widerruf etc. verursacht dagegen vor allem traumatische Erlebnisse beim Betroffenen.

■ 1.3. Protokoll

Die Version von *Mathematica* lautet:

{$Version, $ReleaseNumber, $LicenseID}

{Microsoft Windows 3.0 (October 6, 1996), 0, L4526−3546}

Die Berechnungszeit betrug:

TimeUsed[] "s"

12.62 s

Literatur

[BS1945]
Bergmann L., Schaefer Cl. *Lehrbuch der Experimentalphysik*, Band **1 Mechnik, Akustik, Wärme**, Walter de Gruyter, Berlin, 2. und 3. Aulfage, (1945)

[EI1957]
Einstein A., Infeld L.: *Die Evolution der Physik*, Rowohlt Hamburg, (1957)

[HMS2004]
Hering E., Martin R., Stohrer M. *Physik für Ingenieure*, Springer-Verlag Berlin etc., 9. Auflage, (2004)